RECHERCHES SUR L'EFFET
D'UNE MACHINE HYDRAULIQUE PROPOSÉE PAR MR. SEGNER PROFESSEUR À GÖTTINGUE;

PAR M. EULER.

Cette Machine est composée d'un vaisseau cylindrique, dont l'axe tient une situation verticale, autour duquel le vaisseau peut librement tourner. Ce vaisseau n'est pas exprimé dans la figure, qui n'en represente qu'une section horizontale A B C D E F faite prés de sa base inferieure. Dans cet endroit le vaisseau est percé de plusieurs trous A, B, C, D, E, F pour y recevoir des tuyaux horizontaux Aa, Bb, Cc, Dd, &c. qui communiquent avec le grand vaisseau. Ces tuyaux sont fermés à l'autre bout, mais ils ont tous une ouverture à coté marquée par les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. La Machine étant construite de cette façon, si l'on remplit d'eau le grand vaisseau, elle en sortira par les ouvertures α, β, γ, δ, &c. des tuyaux horizontaux; & chacun d'eux sera repoussé par la force de reaction de l'eau. Donc, puisque la machine est mobile autour de son axe, & que ces forces de reaction la poussent en même sens, elle commencera d'abord à tourner autour de son axe dans le sens $a\,b\,c\,d\,e\,f$. Et si l'on verse dans le vaisseau continuellement autant d'eau, qu'il faut pour l'entretenir toujours plein, le mouvement de rotation de la machine continuera non seulement, mais il deviendra aussi de plus en plus rapide, jusqu'à ce qu'il aura atteint un certain dégré de vitesse, qu'il conservera ensuite sans aucune variation. *Fig. I.*

Puisque les forces de l'eau peuvent devenir considérables, on voit aussi, que cette machine pourra être employée à vaincre des ob-

stacles,

ſtacles, ou à élever des poids; & peut-être ſera-t-on en état de tirer par ce moyen un plus grand effet de la dépenſe d'eau, qui eſt requiſe pour l'entretien de cette machine, que ſi on la vouloit employer d'une autre façon.

Après avoir donné une deſcription en gros de cette machine, pour rendre mes recherches plus générales, je m'en vai expoſer l'état des pieces, auxquelles il faut avoir égard, en leur ſuppoſant une telle figure, qui convient à la généralité que j'ai en vuë.

I. Quant aux tuyaux horizontaux, qui ſont attachés au grand vaiſſeau, que Mr. *Segner* ſuppoſe droits, je leur donnerai une figure courbe quelconque, en ſorte pourtant, qu'ils ne s'écartent point du plan horizontal, auquel on les conçoit arrangés.

II. Pour la largeur de ces tuyaux, je la ſuppoſerai variable d'une manière quelconque; de ſorte que la quantité, qui exprime la largeur dans un endroit quelconque, ſoit une fonction variable qui dépend de cet endroit.

III. Au lieu que Mr. *Segner* ſuppoſe ces tuyaux percés à coté pour donner l'iſſue à l'eau, je les ſuppoſerai courbés à leur bout; afin que la continuité ne ſoit point interrompue, & que je puiſſe renfermer dans le calcul non ſeulement le mouvement de l'eau dans les tuyaux mais auſſi ſa ſortie à leur bout.

IV. Cependant, quoique je donne à ces tuyaux une largeur variable, je la ſuppoſerai pourtant par tout aſſés petite, pour que la direction du mouvement de l'eau ſoit partout parallele à la direction du tuyau; ou bien que l'eau, qui ſe trouve à chaque ſection du tuyau, ſe meuve avec une viteſſe égale.

V. Le grand vaiſſeau ſera, comme Mr. *Segner* le ſuppoſe, librement mobile autour de ſon axe, qui eſt vertical, de ſorte que lorsque la machine tourne autour de cet axe, les tuyaux ſe meuvent tous dans un plan horizontal.

VI. Enfin pour connoitre l'effet d'une telle machine, je lui concevrai attaché un poids, qu'elle doit élever par ſon mouvement de rotation.

Comme

Comme il s'agit maintenant de déterminer l'effet, qu'une telle machine eſt capable de produire, il faut remarquer que cet effet réſulte des efforts, que l'eau en paſſant par les tuyaux y exerce. Car premiérement il eſt connu que l'eau en ſortant d'un vaiſſeau le repouſſe avec une force, qu'on nomme la reaction: Et enſuite, ſi les tuyaux ſont courbes, entant que l'eau eſt obligée de changer de direction, il en nait une force centrifuge, dont les tuyaux éprouvent la preſſion. On comprendra auſſi aiſément que ces forces doivent être bien differentes, lorsque la machine aura déjà acquis un mouvement de rotation, & lorsqu'elle eſt en repos; il conviendra donc de commencer mes recherches par celle des efforts, que l'eau en paſſant par les tuyaux d'un mouvement quelconque y exerce, pendant que ces tuyaux mêmes tournent autour de l'axe de la machine auſſi avec un mouvement quelconque. Pour cet effet, comme le mouvement tant des tuyaux que de l'eau eſt ſuppoſé connu, il faudra chercher les forces requiſes, pour entretenir ce mouvement ſuppoſé dans l'eau, ce qui ſera le ſujet de mon premier probleme.

PROBLEME I.

Le mouvement tant de la machine même que de l'eau qui coule par les tuyaux étant connu, déterminer les forces qui ſont requiſes pour maintenir l'eau dans ce mouvement.

SOLUTION.

Que le plan de la planche répreſente la ſection horizontale du vaiſſeau à l'endroit où il porte les tuyaux horizontaux; ſoit O l'axe ou le centre de la baſe du vaiſſeau, dont le rayon OA ſoit nommé $= a$. Que la droite AME enſuite répreſente un des tuyaux horizontaux, dont la largeur en A ſoit $= ff$, où il communique avec le vaiſſeau. De plus, ayant tiré d'un endroit quelconque M du tuyau au centre O la droite OM, ſoit $AX = x$ & $OM = y$; & la figure du tuyau ſera exprimée par une équation entre x & y. Soit outre cela *Fig. II.*

la largeur du tuyau en M $= zz$, qui pourra être regardée comme une fonction de x ou y. Pour le mouvement de rotation de la machine, soit la vitesse dont le point A tourne à present dans le sens CA autour du centre O $= \sqrt{u}$, & supposant que le point A ait été au commencement en C, qu'il soit parvenu en A après un tems $= t$, je regarderai la quantité u comme une fonction du tems t, pour donner à ce mouvement toute la variabilité possible. Ensuite soit $\sqrt{v}$ la vitesse dont l'eau entre à present par l'ouverture ff en A dans le tuyau A M E, de sorte que $\sqrt{v}$ marque, non la vitesse veritable de l'eau, mais sa vitesse rélative à l'égard du tuyau : & soit v également une fonction quelconque du tems écoulé t. Dans ce même instant la vitesse d'une goutte d'eau qui se trouve en M sera $= \frac{ff\sqrt{v}}{zz}$, à cause de la largeur du tuyau en M $= zz$, celle en A étant $= ff$. Ainsi $\frac{ff\sqrt{v}}{zz}$ exprimera aussi la vitesse rélative de l'eau dans le tuyau en M, & partant sa direction sera celle du tuyau même savoir Mm. Or à cause du mouvement de rotation, le point du tuyau M sera emporté suivant la direction MM′ perpendiculaire à OM, avec une vitesse $= \frac{y\sqrt{u}}{a}$. Donc le vrai mouvement d'une goutte d'eau en M sera composé de ces deux mouvemens, dont l'un se fait avec la vitesse $\frac{ff\sqrt{v}}{zz}$ suivant la direction Mm & l'autre avec la vitesse $\frac{y\sqrt{u}}{a}$ suivant la direction MM′. Décomposons ce mouvement suivant deux directions fixes, dont l'une soit la droite OCD, & l'autre y soit perpendiculaire ; qu'on tire pour cet effet la droite M P perpendiculaire à OD, & qu'on nomme O P $= X$ & P M $= Y$. Les vitesses de l'eau en M selon les directions OP & PM seront donc $\frac{dX}{dt}$ & $\frac{dY}{dt}$: d'où il s'ensuit que posant l'élément du tems dt constant, il faut que

l'eau

l'eau en M ſoit ſollicitée par deux forces acceleratrices, l'une ſuivant la direction OP, qui ſera $= \frac{2\,ddX}{dt^2}$ & l'autre ſuivant la direction PM, qui ſera $= \frac{2\,ddY}{dt^2}$. Reduiſons maintenant ces deux forces à deux autres directions OM & MM′, qui ne dépendent plus de la poſition de la droite OP, & la force ſelon OP $= \frac{2\,ddX}{dt^2}$ donne pour la direction OM ou Mμ la force $\frac{2\,X\,ddX}{y\,dt^2}$ & pour la direction MM′ la force $- \frac{2\,Y\,ddX}{y\,dt^2}$. De même la force ſelon PM $= \frac{2\,ddY}{dt^2}$ donne pour la direction Mμ la force $\frac{2\,Y\,ddY}{y\,dt^2}$ & pour MM′ la force $= \frac{2\,X\,ddY}{y\,dt^2}$; de ſorte que nous aurons deux forces

l'une ſelon Mμ $= \frac{2\,X\,ddX + 2\,Y\,ddY}{y\,dt^2}$

l'autre ſelon MM′ $= \frac{2\,X\,ddY - 2\,Y\,ddX}{y\,dt^2}$

Soit l'angle DOM $= \Phi$, & ayant $X = y \operatorname{cof} \Phi$ & $Y = y \operatorname{fin} \Phi$ nous aurons $dX = dy \operatorname{cof}\Phi - y\,d\Phi \operatorname{fin}\Phi$ & $dY = dy \operatorname{fin}\Phi + y\,d\Phi \operatorname{cof}\Phi$ & encore

$$ddX = ddy \operatorname{cof}\Phi - 2\,dy\,d\Phi \operatorname{fin}\Phi - y\,d\Phi^2 \operatorname{cof}\Phi - y\,dd\Phi \operatorname{fin}\Phi$$
$$ddY = ddy \operatorname{fin}\Phi + 2\,dy\,d\Phi \operatorname{cof}\Phi - y\,d\Phi^2 \operatorname{fin}\Phi + y\,dd\Phi \operatorname{cof}\Phi$$

& partant nos deux forces acceleratrices ſeront

la force ſelon Mμ $= \frac{2}{dt^2}\,(ddy - y\,d\Phi^2)$

la force ſelon MM′ $= \frac{2}{dt^2}\,(2\,dy\,d\Phi + y\,dd\Phi)$.

Il faut donc à present chercher les valeurs des differentiels $d\Phi$ & $dd\Phi$, par les mouvements ſuppoſés. Soit pour cet effet l'angle COA $= \omega$, & puisque dans l'élément du tems dt le point A eſt transporté en A′ desorte que AA′ $= dt\,\sqrt{u}$, nous en tirons $d\omega = \frac{dt\,\sqrt{u}}{a}$. Enſuite ayant AX $= x$, l'angle AOX ſera $= \frac{x}{a}$; & partant à cauſe de $\Phi = \omega - \frac{x}{a}$, nous aurons $d\Phi = \frac{dt\,\sqrt{u}}{a} - \frac{dx}{a}$ & $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\sqrt{u}}{a} - \frac{dx}{a\,dt}$. Or à cauſe du mouvement de l'eau dans le tuyau avec la viteſſe $= \frac{ff\sqrt{v}}{zz}$ ſelon la direction Mm, elle parcourra dans le tems dt l'eſpace M$m = \frac{ff\,dt\,\sqrt{v}}{zz}$. Donc, poſant pour abréger Mm $= \sqrt{\left(dy^2 + \frac{yy\,dx^2}{aa}\right)} = ds$, & l'angle AMX ou M$mk = \theta$, nous aurons $dy = ds \cos\theta$ & $\frac{y\,dx}{a} = ds \sin\theta$ ou $dx = \frac{a\,ds \sin\theta}{y}$.

Partant puisque $ds = \frac{ff\,dt\,\sqrt{v}}{zz}$, nous aurons

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ff\cos\theta.\sqrt{v}}{zz} \;\&\; \frac{dx}{dt} = \frac{aff\sin\theta}{yzz}\sqrt{v};\ \text{donc}\ \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\sqrt{u}}{a} - \frac{ff\sin\theta.\sqrt{v}}{yzz}$$

Paſſons aux ſeconds differentiels, & nous trouverons

$$\frac{ddy}{dt^2} = \frac{-ff\,d\theta \sin\theta\sqrt{v}}{zz\,dt} + \frac{ff\,dv \cos\theta}{2zz\,dt\,\sqrt{v}} - \frac{2ff\,dz \cos\theta.\sqrt{v}}{z^3\,dt}$$

$$\frac{dd\Phi}{dt^2} = \frac{du}{2a\,dt\,\sqrt{u}} - \frac{ff\,d\theta \cos\theta\sqrt{v}}{yzz\,dt} - \frac{ff\,dv \sin\theta}{2yzz\,dt\,\sqrt{v}} + \frac{ff\,dy \sin\theta\sqrt{v}}{yyzz\,dt} + \frac{2ff\,dz \sin\theta\sqrt{v}}{yz\,dt}$$

De

De là nos forces acceleratrices feront

I. Selon $M\mu$

$$-\frac{2yu}{aa}+\frac{4ff\sin\theta\sqrt{uv}}{azz}-\frac{2fv^4\sin\theta^2}{y\,z^4}-\frac{2ffd\theta\sin\theta\sqrt{v}}{zzdt}$$
$$+\frac{ffdv\cos\theta}{zzdt\sqrt{v}}-\frac{4ffdz\cos\theta.\sqrt{v}}{z\;dt}$$

II. Selon MM'

$$\frac{4ff\cos\theta\sqrt{uv}}{azz}-\frac{4f^4v\sin\theta\cos\theta}{y\,z^4}+\frac{ydu}{adt\sqrt{u}}-\frac{2ffd\theta\cos\theta.\sqrt{v}}{zzdt}$$
$$-\frac{ffdv\sin\theta}{zzdt\sqrt{v}}+\frac{2ffdy\sin\theta\sqrt{v}}{yzzdt}+\frac{4ffdz\sin\theta\sqrt{v}}{z^3\,dt}$$

Or il convient de réduire ces forces encore à d'autres directions, qui fe rapportent à celle du tuyau, dont l'une foit fuivant la direction du tuyau Mm & l'autre y foit perpendiculaire fuivant MR: & on aura

la force felon Mm = force $M\mu.\cos\theta$ − force $MM'.\sin\theta$

la force felon MR = force $M\mu.\sin\theta$ − force $MM'.\cos\theta$

ainfi il en réfultera.

I. La force felon Mm

$$-\frac{2yu\cos\theta}{aa}+\frac{2f^4v\sin\theta^2\cos\theta}{y\,z^4}-\frac{ydu\sin\theta}{adt\sqrt{u}}+\frac{ffdv}{zzdt\sqrt{v}}-\frac{2ffdy\sin\theta^2\sqrt{v}}{yzzdt}$$
$$-\frac{4ffdz\sqrt{v}}{z^3\,dt}$$

II. La force felon MR

$$\frac{2yu\sin\theta}{aa}-\frac{4ff\sqrt{uv}}{azz}+\frac{2f^4v\sin\theta(\sin\theta^2+2\cos\theta^2)}{y\,z^4}+\frac{2ffd\theta\sqrt{v}}{zzdt}$$
$$-\frac{ydu\cos\theta}{adt\sqrt{u}}-\frac{2ffdy\sin\theta\cos\theta.\sqrt{v}}{yzzdt}$$

Ici il faut remarquer que nous avons deux especes de quantités, dont l'une comprend des fonctions du tems t, & l'autre les quantités qui dependent de la variabilité du point M. De la premiere espece sont les vitesses $\sqrt{u}$ & $\sqrt{v}$, & partant $\frac{du}{dt}$ & $\frac{dv}{dt}$ seront des quantités finies & fonctions du tems t : l'autre espece comprend les autres quantités x, y, z, θ, & ds qui se rapportent ensemble. Par conséquent, pour que les fractions $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ & $\frac{d\theta}{dt}$ ayent des valeurs déterminées, il faut mettre au lieu de dt sa valeur $\frac{zzds}{ff\sqrt{v}}$: d'où nous aurons à cause de $dy = ds \operatorname{cof} \theta$;

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ff \operatorname{cof}\theta . \sqrt{v}}{zz}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{ff\, dz \sqrt{v}}{zzds}; \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{ff\, d\theta \sqrt{v}}{zzds}$$

Faisant donc ces substitutions, & séparant en chaque terme les fonctions du tems t de celles qui dépendent du tuyau, nos forces acceleratrices seront.

I. La force selon Mm

$$-\frac{2u}{aa} . y \operatorname{cof}\theta - \frac{du}{a\,dt\sqrt{u}} . y \operatorname{fin}\theta + \frac{dv}{dt\sqrt{v}} . \frac{ff}{zz} - 4\, v . \frac{f^4 dz}{z^5 ds}$$

II. La force selon MR

$$\frac{2u}{aa} . y \operatorname{fin}\theta - \frac{4\sqrt{uv}}{a} . \frac{ff}{zz} + 2\, v . \frac{f^4 \operatorname{fin}\theta}{y\, z^4} - \frac{du}{a\,dt\sqrt{u}} . y \operatorname{cof}\theta + 2\, v . \frac{f^4 d\theta}{z^4 ds}$$

Or nommant le rayon de courbure du tuyau en M favoir MR $= r$, on aura $r = \frac{y\,dy}{dy \operatorname{fin}\theta + y\,d\theta \operatorname{cof}\theta}$, & partant $\frac{1}{r} = \frac{\operatorname{fin}\theta}{y} + \frac{d\theta \operatorname{cof}\theta}{dy}$ $= \frac{\operatorname{fin}\theta}{y} + \frac{d\theta}{ds}$: d'où l'expression pour la force acceleratrice selon

MR

M R deviendra plus ſimple ſavoir

$$\frac{2u}{aa}.\, y\sin\theta - \frac{4\sqrt{uv}}{a}.\, \frac{ff}{zz} + 2\,v.\, \frac{f^4}{rz^4} - \frac{du}{a\,dt\sqrt{u}}.\, y\cos\theta$$

C. Q. F. T.

COROLL. I.

Donc, pour que l'eau pourſuive le mouvement, que nous venons de ſuppoſer, il faut qu'un élément d'eau quelconque, qui ſe trouve en M, ſoit ſollicité par deux forces acceleratrices, dont l'une agiſſe ſelon la direction du tuyau Mm qui eſt $= \frac{dv}{dt\sqrt{v}}.\, \frac{ff}{zz} - \frac{du}{adt\sqrt{u}}.\, y\sin\theta - \frac{2u}{aa}.\, y\cos\theta - 4\,v.\, \frac{f^4\,dz}{z^5\,ds}$ & l'autre ſelon la direction du rayon de courbure MR, qui eſt $= 2\,v.\, \frac{f^4}{rz^4} - \frac{du}{adt\sqrt{u}}.\, y\cos\theta + \frac{2u}{aa}.\, y\sin\theta - \frac{4\sqrt{uv}}{a}.\, \frac{ff}{zz}.$

COROLL. II

C'eſt donc l'inertie de l'eau qui exige ces deux forces pour la conſervation du mouvement ſuppoſé ; & on pourra nommer la force qui agit ſelon Mm la force tangentielle, & l'autre force qui agit ſelon MR la force normale.

COROLL. III

Puiſque les viteſſes $\sqrt{u}$ & $\sqrt{v}$ ſont des fonctions du tems, on aura à chaque tems propoſé auſſi les valeurs des fractions $\frac{dv}{dt\sqrt{v}}$ & $\frac{du}{adt\sqrt{u}}$; & puiſque la figure du tuyau eſt ſuppoſée connue, on pourra pour chaque tems déterminer les forces, dont chaque élément d'eau dans le tuyau ſera ſollicité.

CO-

COROLL. IV.

Pour la force tangentielle elle doit être produite par les forces qui agiſſent actuellement ſur l'eau dans le tuyau. Or puisque le tuyau eſt ſuppoſé horizontal, la gravité de l'eau n'y contribue rien : il ne reſte donc que l'état de compreſſion de l'eau dans le tuyau, dont elle puiſſe recevoir des impreſſions ſuivant la direction du tuyau. C'eſt donc de là qu'on pourra déterminer l'état de compreſſion de l'eau à chaque endroit du tuyau.

COROLL. V.

La force normale ſelon MR eſt requiſe pour conſerver l'eau dans le tuyau; ce feront donc les parois du tuyau qui exercent cette force ſur l'eau. D'où il s'enſuit que l'eau preſſe le tuyau avec la même force ſelon la direction oppoſée MS : Donc le tuyau ſera preſſé en M ſelon la direction MS avec une force acceleratrice $= 2\, v.\frac{f^4}{r\, z^4}$

$$- \frac{du}{a\,dt\, \sqrt{u}}.\, y \cos\theta + \frac{2u}{aa}.\, y \sin\theta - \frac{4\sqrt{uv}}{a}.\frac{ff}{zz}.$$

PROBLEME II.

Le mouvement de rotation, tant du tuyau que celui de l'eau par le tuyau, étant connu, déterminer l'état de compreſſion, où l'eau ſe trouve dans le tuyau à tout tems & à chaque endroit du tuyau.

SOLUTION.

Fig. III. Quoique l'eau ne ſe laiſſe pas réduire en un plus petit eſpace par quelque force que ce ſoit, elle ſoutient pourtant les forces, qui tendent à la comprimer : ainſi ſi nous conſidérons une eau dormante, ſes parties qui ſe trouvent à une plus grande profondeur, éprouvent une plus grande force de compreſſion ; & on peut dire qu'elles ſe trouvent dans l'état d'une plus grande compreſſion. Comme cette compreſſion eſt cauſée par le poids de l'eau ſuperieure, on pourra exprimer l'état de compreſſion par la profondeur, où l'eau ſe trouve. Ainſi on

on pourra aſſigner une profondeur dans l'eau dormante, où l'état de compreſſion eſt égal à celui qui convient à l'eau en M, pendant qu'elle paſſe par nôtre tuyau mobile. Soit donc p cette hauteur, qui exprime l'état de compreſſion de l'eau en M, dans le tuyau pour l'inſtant preſent, & l'état de compreſſion de l'eau en m ſera $= p + dp$. pour le même inſtant; donc poſant $Mm = ds$, la fraction $\frac{dp}{ds}$ ſera une quantité finie. Conſidérons donc la particule d'eau, qui remplit l'élément du tuyau $MNmn$, & la maſſe de cette eau ſera $= zzds$, qui ſoutenant en MN la force motrice $= pzz$ en ſera pouſſée en avant ſelon Mm avec une force acceleratrice $= \frac{pzz}{zzds} = \frac{p}{ds}$: or la même particule d'eau étant repouſſée par la preſſion de l'eau ſur la baſe mn, cette force acceleratrice contraire ſera $= \frac{p+dp}{ds}$: donc l'élément d'eau $MNmn$ ſera pouſſé en avant ſelon Mm avec la force acceleratrice $= -\frac{dp}{ds}$. Il faut donc que cette force ſoit égale à celle, dont nous avons trouvé que l'eau en M doit être ſollicitée ſelon la direction Mm, & partant nous aurons cette équation:

$$-\frac{dp}{ds} = \frac{dv}{dt\sqrt{v}} \cdot -\frac{ff}{zz}\,\frac{du}{adt\sqrt{u}} \cdot y \sin\theta - \frac{2u}{aa} \cdot y \cos\theta - 4v \cdot \frac{f^4\,dz}{z^5\,ds}$$

ou bien à cauſe de $dy = ds \cos\theta$

$$dp = -\frac{dv}{dt\sqrt{v}} \cdot \frac{ffds}{zz} + \frac{du}{adt\sqrt{u}} \cdot y\,ds \sin\theta + \frac{2u}{aa} \cdot y\,dy + 4v \cdot \frac{f^4\,dz}{z^5}$$

Et puiſque nous regardons ici le même inſtant du tems, pour connoître l'état de compreſtion de l'eau dans tous les points du tuyau pour cet inſtant, nous devons conſidérer comme conſtant le tems t & les quantités qui en dependent. Par conſéquent prenant les integrales nous obtiendrons

 $p =$

$$p = C - \frac{dv}{dt\sqrt{v}} \int \frac{ffds}{zz} + \frac{du}{adt\sqrt{u}} \int yds\sin\theta + \frac{u}{aa}.yy - v.\frac{f^4}{z^4}$$

où je ſuppoſe que ces integrales $\int \frac{ffds}{zz}$ & $\int yds\sin\theta$ ſont priſes en ſorte qu'elles evanouiſſent au point A, où il devient $y = a$, & $zz = ff$.

Maintenant, pour connoitre la conſtante C, il faut avoir égard à l'endroit, où l'eau ſort du tuyau ; ſuppoſons que cela arrive en E F, où l'ouverture ſoit $= hh$, la diſtance O E $= b$, & étendant les integrales jusqu'à cet endroit là, c'eſt à dire par le tuyau ABEF tout entier, ſoit $\int \frac{ffds}{zz} = E$ & $\int yds\sin\theta = F$. Or on ſait, que là, où l'eau échappe dans l'air, l'état de compreſſion évanouit ; Donc, transportant le point M en E, où devient $y = b$ & $zz = hh$, il faut qu'il ſoit $p = o$; d'où nous tirerons

$$o = C - \frac{dv}{dt\sqrt{v}}.\ E + \frac{du}{adt\sqrt{u}}.\ F + \frac{u}{aa}.\ bb - v.\ \frac{f^4}{h^4}$$

Et partant pour cet inſtant l'état de compreſſion de l'eau dans un endroit quelconque M du tuyau ſera

$$p = \frac{dv}{dt\sqrt{v}}\left(E - \int\frac{ffds}{zz}\right) - \frac{du}{adt\sqrt{u}}\left(F - \int yds\sin\theta\right) - \frac{u}{aa}(bb - yy) + v\left(\frac{f^4}{h^4} - \frac{f^4}{z^4}\right)$$

C. Q. F. T.

COROLL. I.

De là il s'enſuit qu'au commencement du tuyau en A, où l'eau entre dans le tuyau, l'état de compreſſion de l'eau ſera exprimé par la hauteur :

$$\frac{du}{dt\sqrt{v}}.\ E - \frac{du}{adt\sqrt{u}}.\ F - \frac{u}{aa}\ (bb - aa) + v\ \left(\frac{f^4}{h^4} - 1\right)$$

puisque pour cet endroit il devient $y = a$; $zz = ff$ & $\int \frac{ffds}{zz} = o$, $\int yds\sin\theta = o$.

CO-

COROLL. II.

Si, tant le mouvement de rotation du tuyau, que le mouvement de l'eau qui entre en A continuellement dans le tuyau, étoit uniforme, ou qu'il fut tant $du = o$ que $dv = o$, alors l'état de compreſſion de l'eau dans un endroit quelconque M feroit exprimé par la hauteur

$$p = -\frac{u}{aa}(bb - yy) + v\left(\frac{f^4}{h^4} - \frac{f^4}{z^4}\right)$$

SCHOLIE I.

On voit qu'il peut arriver ſouvent, que la hauteur p qui exprime l'état de compreſſion, devienne negative; & dans ce cas les parois du tuyau feroient non ſeulement non preſſées en dehors, mais elles feroient même comme attirées par l'eau en dedans; & partant l'eau devroit quitter les parois du tuyau, & ceſſer de remplir toute la cavité, puisque rien ne reſiſteroit à cette force negative. Et en effet, ce cas doit arriver dans le vuide, & la continuité de l'eau ſera interrompuë dans ces endroits, où la valeur de p devient negative, entant que la cohéſion des particules d'eau au tuyau n'eſt pas capable de maintenir la continuité. Mais on comprendra auſſi, que dans le plein la preſſion de l'atmosphère doit empecher un tel vuide dans le tuyau: car ſi nous avons égard à la preſſion de l'atmosphere, que nous avons négligée dans cette recherche, nous verrons aiſément, que le poids de l'atmosphere doit augmenter l'état de compreſſion de l'eau dans le tuyau, & que cette augmentation ſera égale au poids de l'atmosphere. Donc, ſi nous poſons k pour la hauteur d'une colonne d'eau, qui contrebalance le poids de l'atmosphere, la veritable compreſſion de l'eau dans le tuyau en M ſera exprimée par la hauteur

$$p = k + \frac{dv}{dt\sqrt{v}}\left(\mathrm{E} - \int\frac{ffds}{zz}\right) - \frac{du}{adt\sqrt{u}}(\mathrm{F} - \int y\,ds \sin\theta) - \frac{u}{aa}(bb - yy) + v\left(\frac{f^4}{h^4} - \frac{f^4}{z^4}\right)$$

où k marque comme on ſait une hauteur d'environ 30 pieds. Donc, à moins que cette quantité p ne devienne negative, il n'y a aucun dan-

 ger,

ger, que la continuité de l'eau dans le tuyau ne soit interrompuë: mais cet inconvenient ne manquera pas d'arriver, lorsque p devient negatif; & alors le mouvement de l'eau ne suivra plus les régles que nous venons de supposer: & partant il faudra arranger les machines de cette espece, en sorte que ce cas n'arrive jamais.

SCHOLIE II.

Dans la solution de ce problème j'ai aussi supposé, que l'eau ne rencontre aucun obstacle qui empécheroit son mouvement. Or on sait que l'eau en passant par des tuyaux y éprouve aussi une espece de frottement tout comme les corps solides; & l'éxperience nous fait voir, que lorsque les tuyaux sont fort étroits, le mouvement de l'eau y souffre une diminution très considerable. Cependant personne que je sache n'a encore decouvert les régles, auxquelles ce frottement est assujetti: je m'en vai donc faire un essai pour arriver à ce but, quoique je sois asseuré, que cette question demande de plus profondes recherches, vû que ce n'est que l'eau qui touche immédiatement les parois du tuyau, qui en éprouve la résistance, & que l'eau qui en est éloignée, n'en est arrêtée, qu'entant que la voisine a déjà eprouvé l'effet: d'où l'on voit, que l'eau qui se trouve au milieu du tuyau se mouvra plus vîte que celle qui touche aux parois: circonstance qui rend l'application de la theorie extrémement difficile. Cela nonobstant, je supposerai que l'élement MN nm se meuve tout entier d'un même mouvement, & je tacherai d'en déterminer le frottement sur le pied des corps solides. Or si un tel corps se meut sur une surface, on sait que la force du frottement est proportionnelle à la force dont le corps est pressé contre la surface: donc, si p exprime l'état de compression en M, où il faut prendre cette force toute entiere, ou augmentée du poids de l'atmosphére k, puisque l'atmosphere contribue aussi à presser l'eau contre les parois du tuyau, la force dont les parois du tuyau MNnm sont pressées, sera comme $pzds$: de là nait une force acceleratrice contraire

contraire au mouvement comme $\frac{pzds}{zzds}$ ou comme $\frac{p}{z}$: soit donc cette force $= \frac{\delta p}{z}$, & ou aura pour trouver p cette équation

$$dp + \frac{\delta p ds}{z} = -\frac{dv}{dt\sqrt{v}} \cdot \frac{ff ds}{zz} + \frac{adt\sqrt{u}}{du} \cdot yds \sin\theta + \frac{2u}{aa} \cdot ydy + 4v \cdot \frac{f^4 dz}{z^5}$$

Posons pour rendre le cas plus simple, $dv = o$ & $du = o$, & puisque δ est un nombre trés petit, cette équation deviendra intégrable en la multipliant par $1 + \delta \int \frac{ds}{z}$: & on aura

$$p(1 + \delta \int \frac{ds}{z}) = C + \frac{u}{aa} \cdot yy - v \cdot \frac{f^4}{z^4} + \frac{2\delta u}{aa} \int ydy \int \frac{ds}{z} + 4\delta v \int \frac{f^4 dz}{z^5} \int \frac{ds}{z}$$

ou bien :

$$p(1 + \delta \int \frac{ds}{z}) = C + \frac{u}{aa} \cdot yy - v \cdot \frac{f^4}{z^4} + \frac{\delta u}{aa} \cdot yy \int \frac{ds}{z} - \frac{\delta u}{aa} \int \frac{yyds}{z}$$
$$- \delta v \cdot \frac{f^4}{z^4} \int \frac{ds}{z} + \delta v \int \frac{f^4 ds}{z^5}$$

soit en étendant ces integrales par toute la longueur du tuyau, $\int \frac{ds}{z} = \lambda$; $\int \frac{yyds}{z} = \mu$, $\int \frac{f^4 ds}{z^5} = \nu$; & puisqu'à l'issue de l'eau devient $p = k$, puisque là la seule pression de l'atmosphere agit, on aura :

$$k(1 + \delta\lambda) = C + \frac{u}{aa} bb(1 + \delta\lambda) - v \cdot \frac{f^4}{b^4}(1 + \delta\lambda) - \frac{\delta u}{aa} \cdot \mu + \delta v \cdot \nu$$

 Par

Par conséquent ayant trouvé cette valeur constante nous aurons :

$$p(1+\delta\int\frac{ds}{z})=k(1+\delta\lambda)-\frac{u}{aa}.bb(1+\delta\lambda)+v.\frac{f^4}{h^4}(1+\delta\lambda)+\frac{\delta u}{aa}.\mu$$
$$-\delta v.v+\frac{u}{aa}yy(1+\delta\int\frac{ds}{z})-v.\frac{f^4}{z^4}(1+\delta\int\frac{ds}{z})$$
$$-\frac{\delta u}{aa}\int\frac{yyds}{z}+\delta v\int\frac{f^4 ds}{z^4}$$

ou puisque δ est trés petit, il sera fort à peu près

$$p=k+\delta k(\lambda-\int\frac{ds}{z})-\frac{u}{aa}.bb-\frac{\delta u}{aa}.bb(\lambda-\int\frac{ds}{z})+v.\frac{f^4}{h^4}$$
$$+\delta v.\frac{f^4}{h^4}(\lambda-\int\frac{ds}{z})+\frac{\delta\mu u}{aa}-\delta vv+\frac{u}{aa}.yy-v.\frac{f^4}{z^4}$$
$$-\frac{\delta u}{aa}.\int\frac{yyds}{z}+\delta v\int\frac{f^4 ds}{z^5}$$

ou bien

$$p=k-\frac{u}{aa}(bb-yy)+v\left(\frac{f^4}{h^4}-\frac{f^4}{z^4}\right)+\delta k(\lambda-\int\frac{ds}{z})$$
$$-\frac{\delta u}{aa}\left(\gamma bb-bb\int\frac{ds}{z}-\mu+\int\frac{yyds}{z}\right)+\delta v\left(\frac{\lambda f^4}{h^4}-\frac{f^4}{h^4}\int\frac{ds}{z}-v+\int\frac{f^4 ds}{z^5}\right)$$

Donc l'état de compression en A sera exprimé par cette hauteur :

$$k-\frac{u}{aa}(bb-aa)+v\left(\frac{f^4}{h^4}-1\right)+\delta\lambda k-\frac{\delta u}{aa}(\lambda bb-\mu)+\delta v\left(\frac{\lambda f^4}{h^4}-v\right)$$

où parmi les petits termes $\delta\lambda k$ est pour la pluspart le plus considérable, puisque k marque une hauteur d'environ 30 pieds. Ainsi ayant déterminé par quelque expérience la valeur de δ, on pourra dans la suite employer cette valeur trouvée pour p au lieu de celle, qui

qui a été trouvée cy devant. Au reſte on voit que les quantités λ, μ, ν ſont réciproquement proportionnelles au diametre du tuyau, les autres quantités demeurant les mêmes.

PROBLEME III.

Le mouvement, tant du tuyau autour l'axe O, que de l'eau par le tuyau étant donné, trouver le moment de forces dont la machine ſera ſollicitée autour de ſon axe, à cauſe de l'inertie de l'eau dans le tuyau.

SOLUTION.

Cette force dont nous cherchons le moment, provient donc des preſſions, que le tuyau éprouve de l'eau en vertu de ſon mouvement: & nous avons vû cy-deſſus, que la force acceleratrice, dont l'eau pouſſe le tuyau en M, ſuivant la direction MS perpendiculaire au tuyau, ſelon la direction du mouvement de rotation, qui ſe fait dans le ſens CAG, eſt *Fig.*

$$2\,v.\frac{f^4}{rz^4} - \frac{du}{adt\sqrt{u}}.\,y\cos\theta + \frac{2\,u}{aa}.\,y\sin\theta - \frac{4\sqrt{uv}}{a}.\frac{ff}{zz}.$$

& toute la quantité d'eau compriſe dans l'élément MNnm, dont la maſſe eſt $= zz\,ds$, agit avec cette force ſur le tuyau pour le pouſſer dans le ſens NS. De là réſulte la force motrice en même ſens, qui ſera

$$2\,v.\frac{f^4 ds}{rzz} - \frac{du}{adt\sqrt{u}}.\,yzzds\cos\theta + \frac{2u}{aa}.\,yzzds\sin\theta - \frac{4\sqrt{uv}}{a}.\,ffds$$

& partant le moment de cette force ſe trouvera, en multipliant la force par la diſtance y multipliée par $\cos\theta$. ou conjointement par $y\cos\theta$: donc à cauſe de $ds\cos\theta = dy$ le moment de cette force élémentaire ſera

$$2\,v.\frac{f^4 y\,dy}{rzz} - \frac{du}{adt\sqrt{u}}.\,yyzzdy\cos\theta + \frac{2u}{aa}\,yyzzdy\sin\theta - \frac{4\sqrt{uv}}{a}.\,ffydy$$

Prenant donc l'integrale en ſuppoſant le tems t conſtant, nous trouverons le moment des forces de l'eau contenue dans la partie du tuyau

tuyau ABMN pour tourner la machine dans le ſens CAG, ou bien pour en accelerer le mouvement ; ce moment ſera

$$2v.\int\frac{f^4 y dy}{r zz} - \frac{du}{a dt\sqrt{u}}.yyzzdy\cos\theta + \frac{2u}{aa}yyzzdy\sin\theta - \frac{4\sqrt{uv}}{a}.ff(yy-aa)$$

prenant ces integrales, en ſorte qu'elles evanoüiſſent au point A. Qu'on étende maintenant ces integrales par toute la longueur du tuyau AME jusqu'au bout EF, où il devient $y = b$, & $zz = hh$; & que leurs valeurs totales deviennent $\int yyzzdy\cos\theta = M$; $\int yyzzdy\sin\theta = N$; $\int\frac{f^4 y dy}{rzz} = L$; & l'inertie de l'eau, qui ſe trouve à l'inſtant préſent dans le tuyau, ſera des efforts, pour tourner la machine dans le ſens CAG, ou pour en accelerer le mouvement de rotation qu'elle eſt ſuppoſée avoir déjà, dont le moment total ſera

$$2v.\ L - \frac{du}{a dt\sqrt{u}}.\ M + \frac{2u}{aa}.\ N - \frac{2\sqrt{uv}}{a}ff(bb-aa)$$

C. Q. F. T.

COROLL. I.

Cette expreſſion ne ſert que pour l'inſtant préſent de la machine, où les viteſſes ſont $\sqrt{v}$ & $\sqrt{u}$: & l'acceleration de celle-cy $\frac{du}{dt\sqrt{u}}$: Pour un autre tems où ces quantités auront d'autres valeurs, ce moment changera auſſi, mais il faut remarquer que les lettres L, M, N marquent toujours les mêmes quantités, qui dépendent uniquement de la figure du tuyau.

COROLL. II.

Si la largeur du tuyau zz eſt conſtante, on pourra aſſigner la valeur integrale L. Car, puiſque $\frac{1}{r} = \frac{\sin\theta}{y} + \frac{d\theta}{ds}$, nous aurons

$f^4\, ydy$

$$\frac{f^4 y dy}{r zz} = \frac{f^4}{zz}\left(dy \sin\theta + \frac{y dy d\theta}{ds}\right) = \frac{f^4}{zz}(dy\sin\theta + yd\theta\cos\theta).$$

Donc

$$\int \frac{f^4 y dy}{r zz} = \frac{f^4}{zz} . \; y \sin\theta + C.$$

Et pour avoir la valeur de L, il faut étendre cette integrale depuis le commencement AB jusqu'au bout EF.

COROLL. III.

S'il n'y a qu'une partie du tuyau, qui ait partout la méme largeur, on trouvera aifément la partie de L qui en réfulte. Car foient pour le commencement de cette partie y' & θ' les quantités, qui font pour la fin y & θ ; & la partie de L qui réfulte de cette partie fera

$$\frac{f^4}{zz}(y \sin\theta - y' \sin\theta')$$

SCHOLIE.

Mais l'inertie de l'eau n'eft pas la feule fource des forces, qui agiffent fur le mouvement de rotation de la machine; l'état de compreffion de l'eau dans le tuyau eft auffi capable d'y contribuer quelque chofe, quoiqu'il femble que ces forces agiffant également de toute part fur chaque élément du tuyau, fe détruifent mutuellement. Donc le moment de forces trouvé dans ce probleme n'epuife pas toutes les forces, que l'eau exerce fur le tuyau ; mais il faut féparément chercher celles, qui réfultent de l'état de compreffion de l'eau dans chaque élément du tuyau : ce qui fera le fujet du probleme fuivant.

PROBLEME IV.

Déterminer le moment de forces fur la machine, qui réfulte de l'état de compreffion de l'eau, qui paffe par le tuyau horizontal, pendant que la machine même tourne d'un mouvement quelconque autour de fon axe.

SOLUTION.

Confiderons un élément du tuyau $MNnm$ terminé de deux bafes MN & mn perpendiculaires à la direction du tuyau, & foit p l'état de compreffion de l'eau qui occupe cet élément, & la furface interieure fera preffée par cette force dans tous fes points : or puisque le tuyau eft preffé en dehors par l'atmosphere, afin que je n'aye pas befoin d'y avoir égard, je prendrai pour p la quantité trouvée d'abord, où la valeur de p n'eft pas augmentée de la preffion de l'atmosphere k. Maintenant pour connoitre, fi ces forces qui agiffent fur la furface interne du tuyau $MNnm$ fe foutiennent en équilibre ou non ? je concevrai en MN & mn deux cloifons, entre lesquelles & le tuyau la quantité d'eau $MNnm$ foit renfermée, & qui agiffe également fur ces deux bafes MN & mn. Dans ce cas il eft clair que toutes ces forces, favoir celle fur le tuyau & fur les deux bafes, fe foutiennent en équilibre, ou fe détruifent mutuellement, ou bien nous aurons :

$$f.\text{ du tuyau } + f.\text{ de la bafe } MN + f.\text{ de la bafe } mn = o.$$

& partant la force de l'eau fur le tuyau fera égale & contraire aux forces fur les deux bafes MN & mn conjointement. Ainfi nous n'aurons qu'à chercher les forces de l'eau fur ces deux bafes, pour en conclure celle que le tuyau en foutient. Or la bafe $MN = zz$ étant preffée par le poids d'une colonne d'eau de la hauteur $= p$, cette force fera $= pzz$, qui étant multipliée par $y \sin\theta$ donnera le moment $pyzz \sin\theta$, pour tourner la machine dans le fens CAG : & la force de l'autre bafe donne un moment $= pyzz \sin\theta + 2pyzdz \sin\theta + pzzd.\,y \sin\theta$ pour faire tourner la machine dans le fens contraire GAC. Et partant les forces fur les deux bafes MN & mn produifent un moment $= 2pyzdz \sin\theta + pzzd.\,y \sin\theta$ dans le fens GAC. Par conféquent la force de l'eau, qui agit actuellement fur la furface interne du tuyau $MNnm$, donnera un moment $= 2pyzdz \sin\theta + pzzd.\,y \sin\theta$ dans le fens CAG. Or puis-

puisque $d. \, y \sin\theta = \frac{ydy}{r}$ ce moment sera

$$2pyzdz\sin\theta + \frac{pyzzdy}{r}$$

Or, sans faire réfléxion au frottement, nous avons trouvé cy-dessus:

$$p = \frac{dtVv}{dv}\left(E - \int\frac{ffds}{zz}\right) - \frac{du}{adtVu}(F - \int yds\sin\theta) - \frac{u}{aa}(bb - yy) + v\left(\frac{f^4}{h^4} - \frac{f^4}{z^4}\right)$$

Donc le monent de forces, qui resulte de la compression de l'eau de l'élément MN nm dans le sens C A G sera

$$+ \frac{dv}{dtVv}\left(2yzdz\sin\theta + \frac{yzzdy}{r}\right)\left(E - \int\frac{ffds}{zz}\right) + v\left(2yzdz\sin\theta + \frac{yzzdy}{r}\right)\left(\frac{f^4}{h^4} - \frac{f^4}{z^4}\right)$$

$$- \frac{du}{adtVu}\left(2yzdz\sin\theta + \frac{yzzdy}{r}\right)(F - \int yds\sin\theta) - \frac{u}{aa}\left(2yzdz\sin\theta + \frac{yzzdy}{r}\right)(bb - yy)$$

& prenant les integrales ce moment sera

$$+ \frac{dv}{dtVv}\left(yzz\sin\theta\left(E - \int\frac{ffds}{zz}\right) + \int ffyds\sin\theta\right) + v\left(yzz\sin\theta\left(\frac{f^4}{h^4} - \frac{f^4}{z^4}\right) - 4f^4\int\frac{ydz\sin\theta}{z^3}\right)$$

$$- \frac{du}{adtVu}\left(yzz\sin\theta(F - \int yds\sin\theta) + \int yyzzds\sin\theta^2\right) - \frac{u}{aa}\left(yzz\sin\theta(bb - yy) + 2\int yyzzdy\sin\theta\right)$$

où il faut ajouter telles constantes, que chaque membre evanoüisse au point A, où est le commencement du tuyau.

Donc si nous supposons, que les tuyaux en A soient perpendiculairement attachés au vaisseau, ou qu'il soit en A, $\theta = o$; & posant les valeurs des formules integrales prises par toute la longueur du tuyau:

$$\int yds\sin\theta = F; \quad \int\frac{ydz\sin\theta}{z^3} = H; \quad \int yyzzds\sin\theta^2 = K$$

$$\& \int yyzzdy\sin\theta = N$$

 Le

Le moment de toutes les forces, qui résultent de l'état de compression de l'eau dans le tuyau tout entier A B E F, sera

$$+ \frac{dv}{dt\sqrt{v}} . ffF - 4\, v . f^4\ H - \frac{du}{adt\sqrt{u}} . K - \frac{2u}{aa} . N$$

C. Q. F.

COROLL. I.

Puisque ce moment tend dans le même sens, que celui qui a été trouvé dans le problème précedent, si nous les joignons ensemble, le moment total des forces de l'eau pour faire tourner la machine dans le sens C A G sera

$$\frac{dv}{dt\sqrt{u}} . ffF + 2v(L - 2f^4 H) - \frac{du}{adt\sqrt{u}}(K + M) - \frac{2\sqrt{uv}}{a} ff(bb - aa)$$

COROLL. II

Or ayant $L - 2f^4\ H = f^4 \int\left(\frac{y\,dy}{rzz} - \frac{2\,y\,dz \sin\theta}{z^3}\right)$, à cause de $d.\ y \sin\theta = \frac{y\,dy}{r}$, il sera $L - 2\,f^4\ H = \frac{f^4\, y \sin\theta}{zz}$: où il n'y a pas besoin d'ajouter une constante, lorsque en A l'angle θ évanouït, comme nous le supposons. Et si cet angle θ à l'autre bout devient droit, la valeur de cette intégrale sera $= \frac{f^4\ b}{hh}$: ainsi le moment trouvé prendra cette forme

$$\frac{dv}{dt\sqrt{v}} . ffF - \frac{du}{adt\sqrt{u}}(K + M) + 2v . \frac{f^4 b}{hh} - \frac{2\sqrt{uv}}{a} . ff(bb - aa), \text{ où } K + M = \int yyzzds$$

Mais si l'angle A E O n'étoit pas droit, mais égal à ζ, on devroit multiplier le terme $2\ v . \frac{f^4 b}{hh}$ encore par $\sin\zeta$.

CO-

COROLL. III

Si l'un est l'autre mouvement est uniforme, ou u & v des quantités constantes, le moment des forces de l'eau dans le tuyau pour faire tourner la machine dans le sens CAG sera $= 2\,v.\,\frac{f^4\,b\,\text{fin}\,\zeta}{h\,h}$ $- \frac{2\sqrt{uv}}{a}\,ff\,(bb - aa)$, supposant l'angle AEO $= \zeta$; & que les tuyaux horizontaux sont perpendiculairement inserés dans le vaisseau vertical.

SCHOLIE I.

Tant que l'un ou l'autre mouvement subit des changemens, on voit que le moment des forces de l'eau dépend de la figure du tuyau, puisque les valeurs integrales F, K & M se trouvent dans l'expression: mais dès que ces deux mouvemens sont devenus uniformes, alors le moment trouvé ne dépend plus, ni de la courbure, ni de la diverse largeur du tuyau. Voyons donc quels sont les élémens qui composent ce moment de forces, que nous venons de trouver. Soit pour cet effet $\sqrt{\omega}$ la vitesse dont l'eau échappe par l'orifice EF $= hh$, & puisque $hh\sqrt{\omega} = ff\sqrt{v}$, notre formule deviendra

$$2\;b\;hh\;\omega\;\text{fin}\;\zeta - \frac{2hh\sqrt{u\omega}}{a}\,(bb - aa)$$

Donc les élémens, qui constituent cette formule sont

I. La distance OE $= b$, dont l'orifice du tuyau EF est eloigné de l'axe de la machine.

II. La grandeur de cet orifice indiquée par hh.

III. La vitesse, avec laquelle l'eau echappe du tuyau par cet orifice EF $= hh$, laquelle est supposée duë à la hauteur ω.

IV. L'angle AEO $= \zeta$, que la direction de l'extremité du tuyau fait avec le rayon OE, cette direction est la méme que celle du jet d'eau, qui sort du tuyau.

V. La viteſſe angulaire de la machine qui eſt exprimée par $\frac{Vu}{a}$: car, puisque Vu marque la viteſſe de rotation à la diſtance $OA = a$, la formule $\frac{Vu}{a}$ exprimera le mouvement abſolu de rotation.

VI. Enfin le rayon $OA = a$ entre auſſi par lui-même dans notre formule, entant que le commencement du tuyau AB en eſt indiqué. D'où l'on comprend, que ſi le tuyau AE pénétroit au dedans du vaiſſeau jusqu'à l'axe O, nous aurions au lieu de $bb - aa$ ſeulement bb, de ſorte que le moment des forces de l'eau ſeroit $= 2\,b\,hh\omega \sin \zeta - \frac{2\,bb\,hh\,Vu\omega}{a}$.

Or je ferai voir qu'il revient au même, à quelle diſtance $OA = a$ le tuyau commence; car ſi cette diſtance n'eſt pas égale à zero, on verra que l'eau en entrant du vaiſſeau dans le tuyau y exerce auſſi une force, dont le moment détruira exactement la partie $\frac{2\,hh\,Vu\omega}{a}.\,aa$. Et partant l'effet ſera toujours entierement le même, quelque figure qu'on donne aux tuyaux horizontaux, & de quelque largeur qu'ils ſoient en dedans; il eſt auſſi de même indifferent, à quelle diſtance de l'axe OA ces tuyaux commencent. Par cette raiſon il ſera convenable de donner à ces tuyaux une auſſi grande largeur qu'il eſt poſſible, pour rendre l'effet du frottement d'autant plus inſenſible.

SCHOLIE II.

Ayant ainſi trouvé le veritable moment de forces, dont le tuyau eſt ſollicité par le mouvement de l'eau qui y paſſe, je crois que cet article ne ſera plus aſſujetti à aucun doute, vû que cette force eſt évidemment compoſée de deux parties, dont l'une tire ſon origine des forces normales, dont l'eau agit ſur les parois du tuyau, & l'autre de l'état de compreſſion de l'eau dans le tuyau, dont les preſſions n'étant pas en équilibre entr'elles, produiſent auſſi quelque moment, qui tend

tend à mouvoir le tuyau autour de l'axe. C'eſt auſſi un grand argument de la juſteſſe de mon raiſonnement, que les deux parties trouvées ſe ſont ſi admirablement liées enſemble, que l'expreſſion compoſée eſt devenuë plus ſimple, que n'étoit l'une ou l'autre ſéparément, en quoi conſiſte toujours un caractére bien marqué de la vérité. Mais cette même ſimplicité de la concluſion eſt auſſi une marque ſeure, que j'y ſuis arrivé par des détours, & qu'il y a infailliblement une route plus ſimple & plus naturelle, qui conduit à la même concluſion. Ayant donc examiné plus ſoigneuſement cette circonſtance, je remarque que la même concluſion ſe peut tirer immédiatement des deux forces, dont chaque particule d'eau dans le tuyau eſt ſollicitée, ſans avoir recours à la connoiſſance de l'état de compreſſion de l'eau dans le tuyau. Et effectivement, puiſque l'état de compreſſion eſt déterminé par l'accélération de l'eau dans le tuyau, on comprendra aiſément, que la partie du moment de forces, qui réſulte de l'état de compreſſion, ſe peut déduire immédiatement de la force requiſe à l'accélération. Ayant donc trouvé que chaque particule d'eau, qui ſe trouve dans l'élément du tuyau Mm, requiert pour la conſervation de ſon mouvement deux forces acceleratrices, dont l'une dirigée ſelon Mm eſt $= \frac{dv}{dt\sqrt{v}} . \frac{ff}{zz} - \frac{du}{a\,dt\sqrt{u}} . y \sin\theta - \frac{2u}{aa} y \cos\theta - 4v . \frac{f^4 dz}{z^5 ds}$ que je nommerai $=$ T, & l'autre dirigée ſelon MR, qui eſt $= - \frac{du}{a\,dt\sqrt{u}} . y \cos\theta + \frac{2u}{aa} . y \sin\theta - \frac{4\sqrt{uv}}{a} . \frac{ff}{zz} + 2v . \frac{f^4}{rz^4}$, que je nommerai $=$ V ; à cauſe de la maſſe d'eau, qui occupe l'élément $Mm = zzds$, ces deux forces motrices ſeront, la premiere ſelon $Mm = Tzzds$ & l'autre ſelon $MR = Vzzds$. Ce ſera donc le tuyau même qui doit fournir ces deux forces, & partant il en ſera également repouſſé en vertu de la reaction. Donc l'élément d'eau $MNnm$ exercera deux forces ſur le tuyau, l'une dans la direction de la tangente MT, & l'autre dans la direction normale MS, dont *Fig. III.*

dont celle-là est $= T zzds$, & celle-cy $= V zzds$, & chacune fournira un moment pour tourner la machine dans le sens C A G. Or, puisque l'angle OMT $= \theta$, le premier de ces deux moments sera $= T yzzds \sin\theta$, & l'autre $= V yzzds \cos\theta$, de sorte que ces deux moments ensemble seront $= yzzds\ (T \sin\theta + V \cos\theta)$ Mais les valeurs de T & V donnent

$$T\sin\theta + V\cos\theta = \frac{dv}{dt\sqrt{u}}.\frac{ff\sin\theta}{zz} - \frac{du}{adt\sqrt{u}}.y - \frac{4\sqrt{uv}}{a}.\frac{ff\cos\theta}{zz} - \frac{4v.f^4 dz\sin\theta}{z^5 ds} + \frac{2v.f^4\cos\theta}{rz^4}$$

& partant le moment en question sera

$$\frac{dv}{dt\sqrt{v}}.ffyds\sin\theta - \frac{du}{adt\sqrt{u}}.yyzzds - \frac{4\sqrt{uv}}{a}.ffyds\cos\theta + 2f^4 v\left(\frac{yds\cos\theta}{rzz} - \frac{2ydz\sin\theta}{z^3}\right)$$

Prenant donc les integrales par toute la longueur du tuyau ABEF où devient $zz = hh$; $y = b$; & $\theta = \zeta$, à cause de $ds \cos\theta = dy$, le moment total sera :

$$\frac{dt\sqrt{u}}{du}ff\int yds\sin\theta - \frac{du}{adt\sqrt{u}}.\int yyzzds - \frac{2\sqrt{uv}}{a}ff(bb-aa) + 2f^4 v.\frac{b\sin\zeta}{hh}$$

supposant qu'il y a en A l'angle $\theta = o$. Ce qui est la même formule qui résulte par la combinaison des deux problèmes precedens.

PROBLEME V.

Fig. IV. *La machine étant toujours entretenuë pleine d'eau, & garnie d'un certain nombre de tuyaux horizontaux, & mise dans un certain mouvement de rotation, trouver la vitesse dont l'eau sortira par ces tuyaux, & le moment des forces de l'eau.*

SOLUTION.

Soit OO l'axe, autour duquel la machine est tournée avec un tel mouvement, qu'elle ait à la distance de l'axe $= a$, la vitesse $= \sqrt{u}$. Soit ensuite la hauteur de l'eau dans ce vaisseau audessus des tuyaux horizontaux $= e$, & que l'eau y soit toujours entretenuë à cette hauteur

teur par le moyen d'un réservoir V, d'où l'eau coule dans le vaisseau. Soit de plus $AB = ff$ l'embouchure d'un des tuyaux horizontaux, par laquelle l'eau y entre avec une vitesse $= \sqrt{v}$, que je regarde comme constante, puisqu'on sait par l'experience, que dans ce cas le mouvement parvient bientot à l'uniformité : soit a la distance de cette embouchure AB à l'axe OO, & b celle de l'orifice EF de chaque tuyau, ou $OE = b$, & que hh marque la largeur de cet orifice, par laquelle l'eau échape, avec la vitesse qui sera $\sqrt{\omega} = \frac{ff\sqrt{v}}{hh}$: Soit ζ l'angle que la direction de l'extrémité du tuyau en E fait avec le rayon OE ; & soit n le nombre des tuyaux horizontaux dont le vaisseau est garni. Cela posé nous avons trouvé que l'état de compression de l'eau à l'embouchure AB est exprimé par la hauteur, qui est :

$$-\frac{u}{aa}(bb - aa) + v\left(\frac{f^4}{h^4} - 1\right)$$

à cause de $du = o$ & $dv = o$.

Supposons d'abord que les tuyaux horizontaux pénétrent au dedans du vaisseau jusqu'à l'axe OO, de sorte que $a = o$, entant que cette lettre n'est point jointe à u, & l'état de compresion sera alors à l'embouchure $AB = -\frac{u}{aa}.\ bb + v\left(\frac{f^4}{h^4} - 1\right)$. Or l'eau qui y entre du grand vaisseau n'ayant pas près de l'axe de mouvement, y suivra les loix selon lesquelles l'eau sort d'un vaisseau en repos ; d'où l'on sait que lorsque l'eau sort à une profondeur $= e$ avec une vitesse $= \sqrt{v}$, l'état de compresion y est $= e - v$: dont il faut que cette compresion soit égale à celle qu'exige le mouvement dans les tuyaux, & partant nous aurons.

$$e - v = -\frac{bbu}{aa} + v\left(\frac{f^4}{h^4} - 1\right)$$

ou bien $\frac{f^4 v}{h^4} = \omega = e + \frac{bbu}{aa}$: & ainsi nous connoissons la vi-

 tesse

teſſe avec laquelle l'eau ſortira des tuyaux horizontaux. Mais ſi l'embouchure AB eſt à la diſtance $OA = a$, la compreſſion de l'eau dans le vaiſſeau y ſera plus grande que $e - v$, à cauſe de la force centrifuge de l'eau, & puiſque la viteſſe de rotation y eſt duë à la hauteur u, l'état de compreſſion ſera $e + u - v$, qui étant égalée à $-\frac{u}{aa}(bb - aa) + v\left(\frac{f^4}{h^4} - 1\right)$ donne comme auparavant $\frac{f^4}{h^4} = \omega = e + \frac{bbu}{aa}$; d'où l'on voit, qu'il eſt indifferent de ſuppoſer l'embouchure AB à telle diſtance de l'axe OO qu'on veut. Suppoſons donc cette diſtance $= o$, & le moment de forces, qui réſulte d'un tuyau horizontal ſera $2\, bhh\, \omega \sin \zeta - \frac{2bbhh\sqrt{u\omega}}{a}$; & puiſque le nombre des tuyaux horizontaux eſt $= n$, le moment de toutes les forces de la machine ſera $= 2\, n\, hh\left(b\omega \sin \zeta - \frac{bb\sqrt{u\omega}}{a}\right)$. Or ayant trouvé $\omega = e + \frac{bbu}{aa}$, le moment des forces de la machine ſera

$$= 2n\, hh\, \left(b\left(e + \frac{bbu}{aa}\right) \sin \zeta - \frac{bb}{a} \sqrt{u\left(e + \frac{bbu}{aa}\right)}\right)$$

C. Q. F. T.

COROLL. I.

La force de la machine ſera donc la plus grande, ſi l'angle ζ eſt droit, ou ſi la direction des extremités E des tuyaux horizontaux eſt perpendiculaire aux rayons OE. Dans ce cas le moment des forces de la machine ſera donc $= 2nhh\left(b\left(e + \frac{bbu}{aa}\right) - \frac{bb}{a}\sqrt{u\left(e + \frac{bbu}{aa}\right)}\right)$.

Comme il s'agit de rendre la force de la machine auſſi grande qu'il eſt poſſible, je ſuppoſerai dans la ſuite toujours l'angle AEO droit.

CO-

COROLL. II.

Si le vaiſſeau eſt en repos ou $u = o$, la viteſſe dont l'eau ſort par les orifices des tuyaux horizontaux eſt $= \sqrt{e}$, ou duë à la hauteur de l'eau e: mais ſi la machine tourne, la viteſſe de l'eau, qui ſort par les orifices EF ſera d'autant plus grande, plus ſera vite le mouvement de rotation de la machine, puisque $\omega = e + \frac{bbu}{aa}$.

COROLL. III.

Pour trouver le tems que la machine met à faire un tour entier, on n'a qu'à exprimer la hauteur u en milliemes parties d'un pied de Rhin, & alors $250\sqrt{u}$ marquera l'eſpace que le point A parcourt dans une ſeconde. Donc poſant le rapport du diametre à la circonference $= 1 : \pi$ puisque la peripherie du cercle AGC eſt $= 2\pi a$, un tour de la machine s'achevera en $\frac{2\pi a}{250\sqrt{u}} = \frac{\pi a}{125\sqrt{u}}$ ſecondes.

COROLL. IV.

Soit τ ce nombre de ſecondes, & q la longueur d'un pendule ſimple, qui faſſe en même tems ſes oſcillations & on ſait que $\sqrt{\frac{1}{2}q} = \frac{125\tau}{\pi} = \frac{a}{\sqrt{u}}$; dont $\frac{\sqrt{u}}{a} = \sqrt{\frac{2}{q}}$. Ainſi au lieu de la viteſſe de rotation $\frac{\sqrt{u}}{a}$ on pourra introduire dans le calcul le pendule q dont les oſcillations ſe font en même tems que les révolutions de la machine. Alors on aura $\omega = e + \frac{2bb}{q}$, & le moment des forces de la machine ſera $= 2nhh\left(b\left(e + \frac{2bb}{q}\right) - bb\sqrt{\frac{2}{q}\left(e + \frac{2bb}{q}\right)}\right)$.

COROLL V.

Si la machine eſt arrêtée en repos, on aura $q = \infty$ & $\omega = e$, & le moment des forces de la machine ſera $= 2nhhbe$. Or il eſt

 poſſible

poſſible que la machine tourne ſi vite, que ſa force évanouit, ce qui arrivera lorsque $V(e + \frac{2bb}{q}) = b\, V\frac{2}{q}$, ou bien $q = o$. Ainſi, à moins que le mouvement de rotation ne ſoit infiniment rapide, la machine produira toujours une force, qui tend à accélerer ſon mouvement.

COROLL. VI.

On connoitra auſſi la dépenſe d'eau qu'il faut emploier pour entretenir toujours le vaiſſeau plein d'eau, car elle doit être égale à la perte qui ſe fait par les orifices $= nhh$ avec la viteſſe $V\omega = V(e + \frac{2bb}{q})$. Donc la dépenſe d'eau pourra être exprimée par la formule $nhh\, V(e + \frac{2bb}{q})$.

COROLL. VII.

Pour entretenir donc la machine pendant une ſeconde, en exprimant la hauteur $e + \frac{2bb}{q}$ en milliemes parties du pied de Rhin, la dépenſe d'eau ſera égale à un volume $= 250\, nhh\, V(e + \frac{2bb}{q})$. Ou bien ſi q marque la hauteur, d'où un corps tombe dans une ſeconde, la dépenſe d'eau pour une ſeconde demandera un volume $= 2\, nhh\, Vg\, (e + \frac{2bb}{q})$. Donc pour un tems de τ ſecondes il faudra une dépenſe $= 2\, \tau\, n\, h\, h\, Vg\, (e + \frac{2bb}{q})$.

PROBLEME VI.

Une telle machine étant entretenüe, moyennant une certaine quantité d'eau deſtinée à la depenſe, déterminer l'effet qu'elle ſera capable de produire avec cette depenſe.

SO-

SOLUTION.

Que l'axe de la machine O O porte en haut ou en bas un pignon, engagé à une roue M M, dont l'essieu N N soit garni d'un tambour R S, autour duquel soit la corde P Q avec le poids Q qui doit être élevé. Soit le rayon de ce tambour R S $= c$, & que la roue M M fasse une révolution, pendant que le pignon avec la machine en fait μ. Donc le moment du poids Q pour mettre la machine en mouvement, sera $= \frac{1}{\mu} Qc$, qui doit être égal au moment de la force de la machine, en exprimant le poids Q par le volume d'une masse d'eau dont le poids lui est égal. Soit pour cet effet la hauteur de l'eau dans le vaisseau au dessus des tuyaux horizontaux $= e$, la distance de l'orifice des tuyaux horizontaux à l'axe de la machine $= b$, l'orifice même $= hh$, dont la direction soit perpendiculaire au rayon O E, & le nombre des tuyaux soit $= n$. Ensuite que la machine fasse une révolution dans le tems, qu'un pendule de la longueur q fait une oscillation; donc, posant l pour la longueur d'un pendule à secondes, qui est comme on sait $= 3, 166$ pieds de Rhin, & le tems d'une révolution sera de $\sqrt{\frac{q}{l}}$ secondes, & pendant ce tems le poids Q sera élevé à la hauteur de $\frac{2\pi c}{\mu}$; donc pendant une seconde il sera élevé à la hauteur $= \frac{2\pi c}{\mu} \sqrt{\frac{l}{q}}$. Soit de plus g la hauteur de la chute d'un grave pendant une seconde, & on aura $g = \frac{1}{2} \pi \pi l$, & partant le poids Q sera élevé dans une seconde à la hauteur $= \frac{2c}{\mu} \sqrt{\frac{2g}{q}}$. *Fig. V.*

Or la force de la machine nous fournit d'abord cette équation

$$\frac{1}{\mu} Qc = 2nhh \left(b\left(e + \frac{2bb}{q}\right) - bb \sqrt{\frac{2}{q}\left(e + \frac{2bb}{q}\right)}\right)$$

Enfuite foit D le volume d'eau qu'on veut emploier pour entretenir le vaiffeau plein d'eau, & fuppofons que cette dépenfe foit capable de fournir à la machine pendant un tems de τ fecondes, d'où nous tirons cette équation

$$D = 2\tau n h h \sqrt{g}\left(e + \frac{2bb}{q}\right)$$

& partant $\tau = \frac{D}{2nhh\sqrt{g}\left(e+\frac{2bb}{q}\right)}$ & pendant ce tems le poids Q fera élevé à la hauteur ===

$$\frac{Dc\sqrt{2}}{\mu nhh\sqrt{q}\left(e+\frac{2bb}{q}\right)} = \frac{Dc\sqrt{2}}{\mu nhh\sqrt{(eq+2bb)}}.$$

Mais le poids Q étant donné, la machine prendra d'elle-même un tel mouvement de rotation, que l'état d'équilibre exige : ainfi le pendule q fera déterminé par cette équation.

$$\frac{Qc}{2\mu nbhh} = e + \frac{2bb}{b} - \sqrt{\frac{2bb}{q}\left(e+\frac{2bb}{q}\right)}$$

Soit pour abréger $\frac{2bb}{q} = z$, & $\frac{Qc}{2\mu nbhh} = S$ pour avoir $e + z - S = \sqrt{(ez+zz)}$, d'où l'on tire

$$z = \frac{2bb}{q} = \frac{(e-S)^2}{2S-e}\text{; donc } q = \frac{2bb(2S-e)}{(e-S)^2}$$

ou bien $q = \frac{8\mu nb^3hh(Qc-\mu nbehh)}{(2\mu nbehh - Qc)^2}$

Enfuite on aura $e + \frac{2bb}{q} = \frac{SS}{2S-e} = \frac{QQcc}{4\mu nbhh(Qc-\mu nbehh)}$

Donc la dépenfe d'eau propofée fuffira pour un tems

de $\frac{D}{Qc}\sqrt{\frac{\mu b(Qc-\mu nbhhe)}{nghh}}$ fecondes

pendant

pendant lequel le poids Q ſera élevé à la hauteur qui eſt $= \frac{D}{Q}\left(2e - \frac{\mu n b h h}{Q c}\right)$. C. Q. F. T.

COROLL. I.

Comme la racine quarrée $\sqrt{(ez + zz)} = \sqrt{\frac{2bb}{q}\left(e + \frac{2bb}{q}\right)}$ eſt toujours priſe affirmativement, il faut qu'il ſoit $S < e + z$ ou $S < \frac{SS}{2S - e}$, & partant $S < e$, ou bien $Q < \frac{2 \mu n b e h h}{c}$; ou $\frac{1}{\mu} Qc < 2 n b e h h$. Car ſi ce poids étoit plus grand, la machine ne parviendroit jamais dans l'état d'équilibre ; & s'il étoit $\frac{1}{\mu} Qc = 2 n b e h h$, la machine reſteroit en repos. D'où l'on voit, que ſi l'on ſuſpendoit en Q un plus grand poids, la machine n'étant pas capable de le ſoutenir, tourneroit en ſens contraire.

COROLL. II.

Or il faut auſſi qu'il ſoit $2S > e$ ou $\frac{1}{\mu} Qc > n b e h h$: car s'il étoit $\frac{1}{\mu} Qc = n b e h h$, à cauſe de $q = o$, le mouvement de rotation de la machine deviendroit infiniment vite, avant que de parvenir à l'état d'équilibre : & s'il étoit $\frac{1}{\mu} Qc < n b e h h$, le mouvement de rotation iroit toujours en augmentant ſans atteindre jamais l'équilibre.

COROLL. III.

Donc, pour que la machine puiſſe arriver à une uniformité de mouvement, il faut que le moment du fardeau à vaincre, que nous indiquons

diquons par $\frac{1}{\mu}$ Q c, ſoit contenu entre ces deux limites $n\,b\,e\,h\,h$ & $2\,n\,b\,e\,h\,h$: dont celui-là demande un mouvement infini, or celui-cy arrêtera la machine en repos.

COROLL. IV.

Si nous multiplions le poids Q par la hauteur, à laquelle il eſt élevé $\frac{D}{Q}\left(2\,e - \frac{Q\,c}{\mu\,n\,b\,h\,h}\right)$, le produit D $\left(2\,e - \frac{Q\,c}{\mu\,n\,b\,h\,h}\right)$ exprimera l'effet abſolu de la machine. D'où nous voyons, que cet effet évanouit, lorsque $\frac{1}{\mu}$ $Q\,c = 2\,n\,b\,e\,h\,h$; & qu'il devient le plus grand ſi $\frac{1}{\mu}$ $Q\,c = n\,b\,e\,h\,h$, ou bien ſi le mouvement de la machine eſt infiniment rapide, & dans ce cas l'effet ſera $= D\,e$.

COROLL. V.

Donc ce plus grand effet $D\,e$, auquel la machine ne ſauroit jamais arriver, eſt équivalent a l'élevation de la maſſe d'eau D à la hauteur du vaiſſeau e; ou bien dans ce cas la machine feroit capable d'élever à la hauteur même du vaiſſeau e préciſément autant d'eau, qu'il faut pour ſa dépenſe: Donc, puisque ce cas ne ſauroit jamais avoir lieu, l'effet de la machine eſt toujours moindre que le produit $D\,e$.

COROLL. VI.

Dans ce cas du plus grand effet $D\,e$, qui répond à la dépenſe d'eau $= D$, il eſt auſſi très remarquable, qu'a cauſe de $q = o$ cet effet eſt produit dans un tems infiniment petit, car il devient $\tau = o$. Et nous voyons en général, que plus l'effet de la machine ſera grand, plus auſſi ſera petit le tems, $p\,e$, dans lequel il eſt produit; ce qui eſt une circonſtance tout a fait particuliere dans cette eſpece de machine.

Or

Or si la machine demeure en repos, ce qui arrive lorsque $\frac{1}{\mu}$ Q c = $2nbehh$, la dépense d'eau = D suffira pour un tems de $\frac{D}{2nhh\sqrt{eg}}$ secondes.

COROLL. VII.

Soit donc $\frac{1}{\mu}$ Q $c = (1+\nu)\,nbehh$, ou $Q = \frac{(1+\nu)\mu nbehh}{c}$, & que ν marque un nombre quelconque plus petit que l'unité. Donc ayant $S = \frac{(1+\nu)}{2}e$ nous aurons pour le tems d'une révolution de la machine $q = \frac{8\nu bb}{(1-\nu)^2 e}$. La dépense d'eau proposée D suffira d'entretenir la machine pendant un tems de $\frac{D\sqrt{\nu}}{(1+\nu)\,nhh\sqrt{eg}}$ secondes, & pendant ce tems le poids Q sera élevé par une hauteur $= \frac{(1-\nu)Dc}{(1+\nu)\mu nbhh}$. Et partant l'effet de la machine sera $= (1-\nu)De$.

SCHOLIE I.

Pour tirer donc le plus grand avantage de ces sortes de machines, il faut tacher de les arranger en sorte, qu'elles puissent recevoir un mouvement de rotation extrémement rapide, puisque nous venons de voir, que plus ce mouvement est vite plus aussi sera grand l'effet, qui en résulte. Pour cet effet il faut ôter soigneusement tous les obstacles, qui se pourroient opposer à un mouvement si rapide. Premiérement donc il sera nécessaire, que l'axe de la machine soit parfaitement vertical, & librement mobile sur ses pivots, de sorte qu'il rencontre de ce coté aussi peu de frottement, qu'il sera possible. En second lieu, le vaisseau $\alpha\alpha\gamma\gamma$ doit étre parfaitement rond & bien uni dans sa surface exterieure, afin qu'en tournant autour de son ax il ne cho-

choque nulle part l'air, & qu'il n'en essuye aucune résistance. En troisieme lieu, afin que les tuyaux horizontaux ne frappent pas l'air non plus, il sera à propos de les renfermer dans un tambour cylindrique attaché en bas au vaisseau, en sorte que seulement les derniers bouts des tuyaux sortent de ce tambour, pour donner une issuë libre à l'eau. Il sera aussi bon de donner à ce tambour un assés grand poids, pour qu'il conserve mieux le mouvement qu'il aura une fois reçu. Il n'importe, ni combien de tuyaux on enferme dans ce tambour, ni quelle figure on leur donne, pourvû que la somme de leurs orifices soit $= n\,b\,b$, & que l'eau y échape de chacun selon une direction perpendiculaire à l'axe de la machine. Enfin, si la machine est emploiée à mettre en mouvement d'autres parties par le moyen des rouës, il faut avoir soin d'arranger tellement ces rouës, & de donner à leurs dents une telle figure, que leur mouvement devienne parfaitement uniforme. Car si le mouvement étoit inégal, & qu'il fût tantôt acceleré tantôt retardé, il se perdroit une bonne partie de la force pour produire tant les accelérations que les retardations ; au lieu que le mouvement uniforme ne demande aucune force pour sa conservation.

SCHOLIE II.

Dans le problème precedent nous avons supposé que la dépense d'eau D, qui est employée à entretenir le vaisseau toujours plein, est en notre pouvoir, & que nous la pouvons verser dans le vaisseau, ou plus vite, ou plus lentement, selon que les besoins l'exigent. Cette maniere parut la plus propre pour faire des expériences avec une machine déja construite de cette façon, & pour les comparer avec la *Fig. IV.* Theorie. Mais s'il y a une source, ou un reservoir V, qui ne fournit qu'une certaine quantité d'eau dans un tems donné, il faut construire la machine en sorte que, quand elle est en action, cette quantité d'eau soit suffisante à entretenir le vaisseau toujours plein : & alors l'action même de la machine doit être tellement disposée, que les forces de l'eau soient suffisantes à la produire. J'examinerai donc dans le problème

blème ſuivant de quelle maniere il conviendra d'arranger la machine pour chaque cas propoſé.

PROBLEME VII.

La quantité d'eau qu'une ſource fournit à l'entretien de la machine, étant donnée, arranger la machine d'une telle maniere, que la quantité d'eau donnée ſoit ſuffiſante à ſon entretien, & que la machine produiſe le plus grand effet qu'il eſt poſſible, en élevant un poids donné.

SOLUTION.

Soit D le volume d'eau que la ſource ou le reſervoir fournit par ſeconde : & il faudra tellement arranger la machine, que cette quantité d'eau ſoit ſuffiſante à entretenir la machine. Or poſant le nombre des tuyaux horizontaux $= n$, l'orifice de chacun $= hh$, leur diſtance à l'axe de rotation $= b$; & que la machine acheve par ſon mouvement une révolution en même tems qu'un pendule de la longueur $= q$ fait ſes oſcillations: ou bien ſoit u la hauteur duë à la viteſſe, dont les orifices des tuyaux tournent autour de l'axe, de ſorte que $u = \frac{2bb}{q}$. Enſuite, poſant la hauteur du vaiſſeau, ou plutôt de l'eau dans le vaiſſeau au deſſus des tuyaux $= e$, & la hauteur de la chûte pendant une ſeconde $= g$, qui eſt comme on ſait de 15, 625 pieds de Rhin. Cela poſé, nous avons vû que l'entretien de la machine demande par ſeconde une quantité d'eau dont le volume eſt $=$ $2nhh\sqrt{g\left(e + \frac{2bb}{q}\right)} = 2nhh\sqrt{g(e+u)}$, & partant nous aurons d'abord cette équation

$$D = 2\,n\,h\,h\,\sqrt{g\,(e+u)}$$

Soit enſuite le poids $= Q$ qui doit être élevé, & ſuppoſons que cela

 ſe

ſe faſſe par le moyen d'un pignon & d'une rouë, qui fait une révolution pendant que la machine en fait μ révolutions; & que ce poids s'éleve autour d'un tambour attaché à l'eſſieu de la rouë, dont le rayon ſoit $= c$, & le moment de ce poids ſera $= \frac{1}{\mu}\ Q\, c$, nous aurons donc :

$$\frac{1}{\mu}\, Q\, c = 2\, n\, b\, h\, h\ (e + u - \sqrt{(e u + u u)})$$

exprimant Q par le volume d'eau, dont le poids eſt égal au poids propoſé. Et alors ce poids ſera élevé pendant une ſeconde à la hauteur, qui eſt $= \frac{2\, c}{\mu} \sqrt{\frac{2 g}{q}} = \frac{2\, c}{\mu\, b} \sqrt{g u}$.

Or la dépenſe d'eau D étant donnée, ſi nous regardons le mouvement de rotation de la machine ou la quantité u comme donnée, nous aurons $2\, n\, h\, h = \frac{D}{\sqrt{g\,(e+u)}}$; ou bien la ſomme des orifices $n\, h\, h = \frac{D}{2\sqrt{g\,(e+u)}}$: d'où nous tirons :

$$\frac{1}{\mu}\ Q\, c = \frac{D\, b}{\sqrt{g}}\ (\sqrt{e+u}) - \sqrt{u})$$

& puiſque le poids Q eſt auſſi donné, l'épaiſſeur du tambour c en ſera déterminée; & on aura

$$\frac{c}{\mu} = \frac{D\, b}{Q\sqrt{g}}\ (\sqrt{(e+u)} - \sqrt{u}).$$

Par conſéquent le poids Q ſera élevé par la force de la machine pendant une ſeconde à une hauteur qui eſt $= \frac{2\, D}{Q}(\sqrt{(eu+uu)} - u)$.

D'où

D'où l'on voit que cette hauteur ſera d'autant plus grande, plus on donne de viteſſe de rotation à la machine, ou plus ſera grande la viteſſe $\sqrt{u}$, avec laquelle tournent les orifices des tuyaux horizontaux : & s'il étoit poſſible de rendre cette viteſſe infinie, la hauteur d'élevation pendant une ſeconde ſeroit $= \frac{De}{Q}$; puisque alors $\sqrt{(eu + uu)} - u = \frac{1}{2} e$. Mais comme il eſt impoſſible d'augmenter cette viteſſe à l'infini, voyons combien les valeurs de la formule $\sqrt{(eu + uu)} - u$ differeront de cette plus grande valeur $\frac{1}{2} e$, lorsqu'on donne à u des valeurs plus petites.

Soit donc	& la valeur de $\sqrt{(eu+uu)} - u$ ſera	Dechet de la plus grande valeur $\frac{1}{2} e$	la perte.
$u = e$	0, 4142. e	0, 0858. e	$\frac{1}{6}$
$u = 2e$	0, 4494. e	0, 0506. e	$\frac{1}{10}$
$u = 3e$	0, 4641. e	0, 0359. e	$\frac{1}{14}$
$u = 4e$	0, 4721. e	0, 0279. e	$\frac{1}{18}$
$u = 5e$	0, 4772. e	0, 0228. e	$\frac{1}{22}$
$u = 6e$	0, 4808. e	0, 0192. e	$\frac{1}{26}$
$u = 7e$	0, 4833. e	0, 0167. e	$\frac{1}{30}$
$u = 8e$	0, 4853. e	0, 0147. e	$\frac{1}{34}$
$u = 9e$	0, 4869. e	0, 0131. e	$\frac{1}{38}$
$u = 10e$	0, 4881. e	0, 0119. e	$\frac{1}{42}$

Ainſi ſi l'on faiſoit $u = e$, on ne perdroit que la ſixieme partie ſur l'effet tout entier, qu'une viteſſe infinie produiroit ; & on n'en perdroit que la dixieme partie, ſi l'on faiſoit $u = 2e$. D'où l'on voit qu'on n'a pas beſoin de s'empreſſer trop à faire la viteſſe de la rotation extrémement grande : puisqu'on voit, que pourvu'que u ſurpaſ-

ſe e, on arrive déjà aſſés près du plus grand effet. Pour mettre donc la machine dans l'état le plus avantageux, on obſervera les maximes ſuivantes.

I. On donnera au vaiſſeau vertical une hauteur e ſi grande que les circonſtances le permettront : car plus cette hauteur ſera grande, plus auſſi deviendra grand l'effet de la machine, & cela en même raiſon.

II. Ayant déterminé la hauteur e de la machine, la longueur des tuyaux horizontaux b ſera déterminée par la viteſſe de rotation de la machine. Ainſi, ſi l'on veut que le tems d'une révolution réponde au pendule $= q$, & qu'il ſoit $u = ve$, à cauſe de $\frac{2bb}{q} = u = ve$, on aura $b = \sqrt{\frac{1}{2} veq}$. Par exemple, ſi l'on vouloit, que les révolutions s'achevaſſent en 2 ſecondes & qu'on prit $v = 2$, ou auroit $q = 12,66$ pieds, & $b = \sqrt{eq}$, & on ne perdroit que la dixieme partie de l'effet entier.

III. Enſuite connoiſſant la quantité d'eau D, que le reſervoir fournit par ſeconde, on en déterminera la ſomme de toutes les ouvertures, par où l'eau ſort des tuyaux horizontaux, cette ſomme étant $nhh = \frac{D}{2\sqrt{g(e+u)}}$; où g marque la hauteur de 15, 625 pieds de Rhin. Il eſt indifferent combien de tuyaux on y veut appliquer, mais il conviendra que ce ſoient au moins deux, afin que la machine ſe maintienne d'autant mieux en équilibre.

IV. Quelque réſiſtance que la machine ait à vaincre, on la peut réduire à un poids Q, qu'elle devroit élever, & pour l'endroit où ce poids doit être appliqué à la machine, on aura

$$\frac{c}{\mu} = \frac{Db}{Q\sqrt{q}}\left(\sqrt{(e+u)} - \sqrt{u}\right)$$

ou

ou bien il faudra appliquer ce poids à un tel endroit de la machine, que sa viteſſe devienne $= \frac{D\,b}{Q\sqrt{g}}(\sqrt{(eu+uu)}-u)$.

C. Q. F. T.

COROLL. I.

L'effet de la machine étant eſtimé par le poids Q multiplié par la hauteur, à laquelle il eſt élevé pendant une ſeconde, cet effet ſera $= 2D(\sqrt{(eu+uu)}-u)$: d'où l'on voit que l'effet eſt proportionnel à la dépenſe d'eau D : & que le plus grand effet poſſible eſt $= De$, qu'on obtiendroit s'il étoit $u = \infty$. Ainſi ce plus grand effet éleveroit préciſement autant d'eau à la hauteur $= e$, qu'il faut pour l'entretien de la machine.

COROLL. II.

Donc, ſi la viteſſe $\sqrt{u}$ n'eſt pas infinie, l'effet de la machine ſera moindre que le plus grand, & le dechet ſera $= 2D(\frac{1}{2}e+u-\sqrt{(eu+uu)})$: donc la partie perduë ſur l'effet tout entier ſera $= \frac{e+2u-2\sqrt{(eu+uu)}}{e}$.

COROLL. III.

Puiſqu'il faut donc perdre toujours quelque partie ſur l'effet tout entier, ſuppoſons qu'on ne veuïlle perdre que la $\frac{1}{\lambda}$ partie de l'effet tout entier De : & alors ou aura $(1-\frac{1}{\lambda})e+2u = 2\sqrt{(eu+uu)}$, d'où l'on tire la hauteur due à la viteſſe $u = \frac{(\lambda-1)^2}{4\lambda}e$. Ainſi la perte, qu'on veut ſouffrir étant donnée, ſavoir $\frac{1}{\lambda}$ partie de l'effet entier

entier, on trouvera aisément la vitesse, dont les bouts des tuyaux horizontaux doivent tourner, par cette table :

Perte	valeur de u	Perte	valeur de u	Perte	valeur de u
1	$0\ e$	$\frac{1}{7}$	$1\ \frac{2}{7}\ e$	$\frac{1}{13}$	$2\ \frac{10}{13}\ e$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}\ e$	$\frac{1}{8}$	$1\ \frac{17}{32}\ e$	$\frac{1}{14}$	$3\ \frac{1}{56}\ e$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}\ e$	$\frac{1}{9}$	$1\ \frac{7}{9}\ e$	$\frac{1}{15}$	$3\ \frac{4}{15}\ e$
$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{16}\ e$	$\frac{1}{10}$	$2\ \frac{1}{40}\ e$	$\frac{1}{16}$	$3\ \frac{33}{64}\ e$
$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}\ e$	$\frac{1}{11}$	$2\ \frac{3}{11}\ e$	$\frac{1}{17}$	$3\ \frac{13}{17}\ e$
$\frac{1}{6}$	$1\ \frac{1}{24}\ e$	$\frac{1}{12}$	$2\ \frac{25}{48}\ e$	$\frac{1}{18}$	$4\ \frac{1}{72}\ e$

COROLL. IV.

Si l'on vouloit se contenter de la moitié de l'effet total, on auroit $u = \frac{1}{8} e$, & $b = \frac{1}{4} \sqrt{eq}$, ou bien $q = \frac{16\, bb}{e}$, & partant on pourra rendre les révolutions aussi vites qu'on voudra : & de plus on aura $\frac{c}{\mu} = \frac{D\, b\, \sqrt{e}}{Q \sqrt{2g}}$. Ou si l'on ne vouloit perdre que le tiers de l'effet total, on auroit $u = \frac{1}{3} e$, $b = \sqrt{\frac{1}{6} eq}$ ou $q = \frac{6\, bb}{e}$ & $\frac{c}{\mu} = \frac{D\, b\, \sqrt{e}}{Q \sqrt{3g}}$. Et en général si l'on ne veut perdre que la partie $\frac{1}{\lambda}$ de l'effet total, on aura $u = \frac{(\lambda - 1)^2}{4\lambda} e$, $b = \frac{(\lambda - 1)}{2} \sqrt{\frac{eb}{2\lambda}}$ ou $q = \frac{8 \lambda\, bb}{(\lambda - 1)^2 e}$; & $\frac{c}{\mu} = \frac{D\, b\, \sqrt{e}}{Q \sqrt{\lambda g}} = \frac{(\lambda - 1)\, D e}{2 \lambda Q} \sqrt{\frac{q}{2g}}$.

COROLL. V.

Si nous posons qu'une révolution de la machine se doive achever en θ secondes, nous aurons $\sqrt{\frac{1}{2} q} = \frac{\theta}{\pi} \sqrt{g}$, & partant nous aurons

rons pour l'endroit de l'application du poids Q cette équation $\frac{e}{\mu} = \frac{(\lambda - 1)\,\theta\, D\, e}{2\,\pi\,\lambda\, Q}$: & pour la longueur des tuyaux horizontaux $b = \frac{(\lambda - 1)\,\theta}{2\,\pi} \sqrt{\frac{1}{\lambda}\, e\, g}$; or pour la ſomme de leurs orifices on aura $n\,h\,h = (\lambda + 1) \sqrt{\frac{1}{\lambda}\, g\, e}$. D'où l'on voit que plus qu'on veut que le mouvement de rotation *ſoit* lent, plus doivent être longs les tuyaux horizontaux.

SCHOLIE.

Ayant vû que le plus grand effet d'une machine de cette façon monte à $D\,e$, & quoiqu'il ſoit impoſſible d'obtenir cet effet, vû que la viteſſe de rotation devroit être infinie, on peut pourtant approcher de ce plus grand effet ſi près, que la difference eſt presque inſenſible; cette eſpece de machine mérite bien toute notre attention. Car ſi nous comparons cet effet avec celui qu'on eſt capable de produire avec la même dépenſe d'eau D & la même hauteur e, en laiſſant choquer cette eau contre une rouë comme à l'ordinaire, l'effet qu'on en peut tirer monteroit à peine à $\frac{1}{6}\,D\,e$: d'où il eſt clair que cette nouvelle maniere de profiter d'une dépenſe d'eau donnée eſt beaucoup plus avantageuſe que les manieres ordinaires, attendu qu'elle eſt capable de produire un effet, qui eſt jusqu'à ſix fois plus grand. Une augmentation ſi conſidérable mériteroit donc bien, que les Mecaniciens apportaſſent tous leurs ſoins à découvrir les moyens, de rendre practicable cette nouvelle maniere de profiter d'une dépenſe d'eau, que fournit une ſource ou un reſervoir; & il n'y a aucun doute qu'une telle application ne ſoit récompenſée par des avantages très importants. Auſſi ne trouvera-t-on pas dans l'exécution tant d'obſtacles, qu'on ſe ſera peut-être imaginé au commencement; le principal chan-

gement, qu'il faudroit faire dans l'arrangement des machines, reviendroit à ce que l'axe de la rouë principale, qui eſt immédiatement miſe en mouvement par la force de l'eau, doit être vertical, au lieu qu'on lui donne ordinairement une ſituation horizontale : pour les autres difficultés, on trouvera aiſément les moyens de les ſurmonter. Au reſte quoique le calcul, ſur lequel eſt fondé l'effet de cette nouvelle ſorte de machines, ne ſoit pas à la portée de tout le monde, on peut aiſément ſe convaincre de ſes avantages, ſi l'on penſe qu'en employant la même dépenſe d'eau ſuivant les methodes ordinaires, il s'en échape une bonne quantité, qui ne contribue rien au mouvement de la machine, & que celle qui frappe actuellement ſur les aubes de la rouë, y produit un effet d'autant plus foible, plus le mouvement de la rouë ſera rapide. Mais en mettant l'eau en action ſelon ce nouveau projet, aucune partie des forces, dont elle eſt ſuſceptible, ne ſe perd inutilement, & le mouvement de la machine ne diminue pas l'effet des forces de l'eau : c'eſt en quoi conſiſte la veritable ſource des grands avantages de cette nouvelle manière.

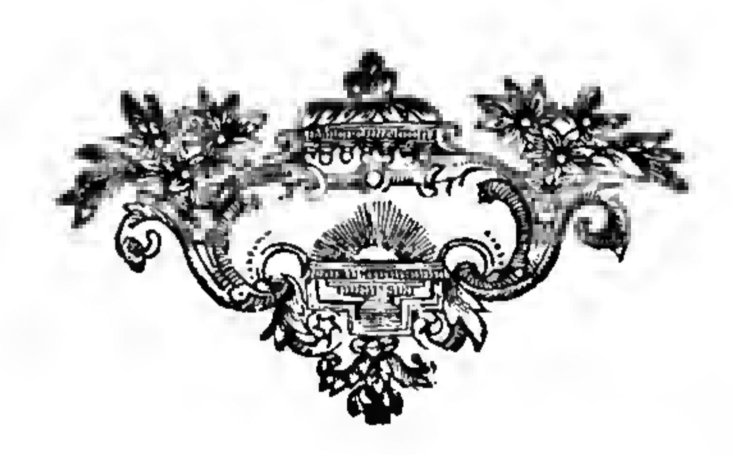
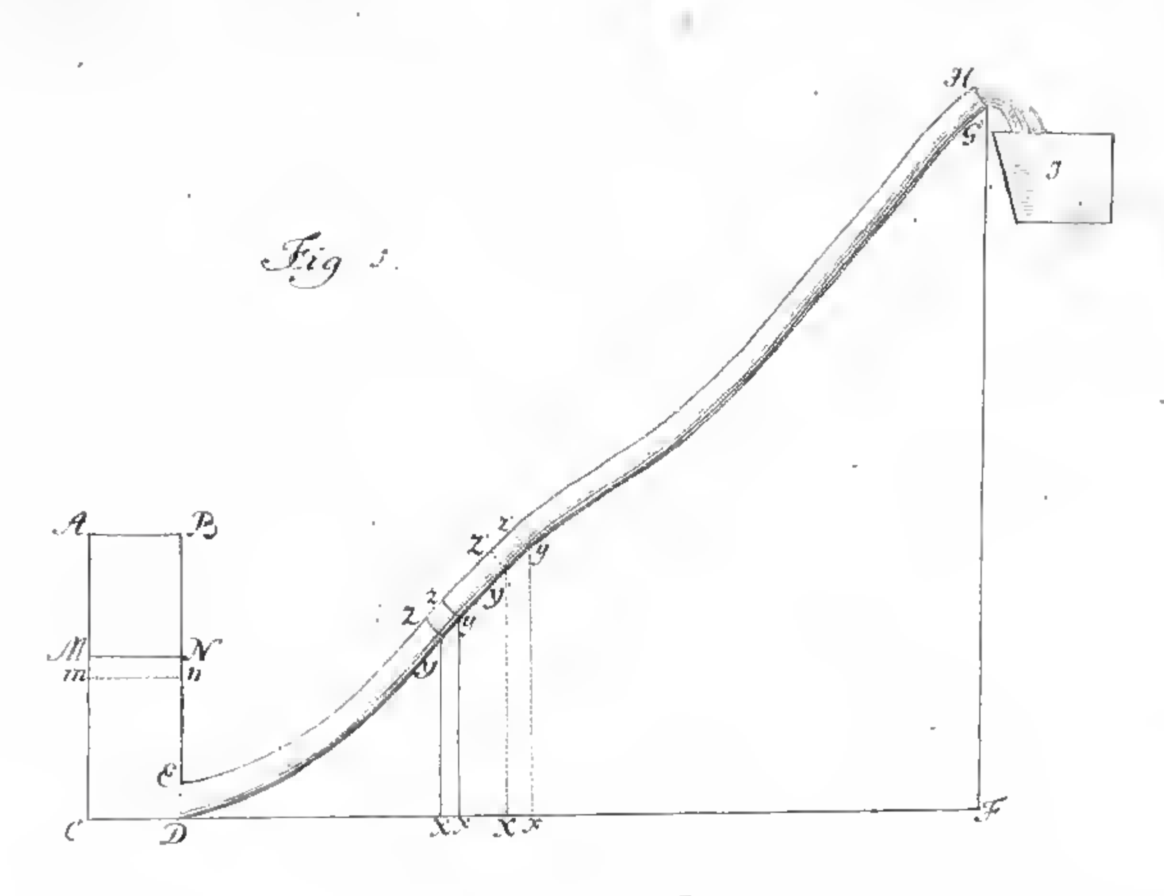
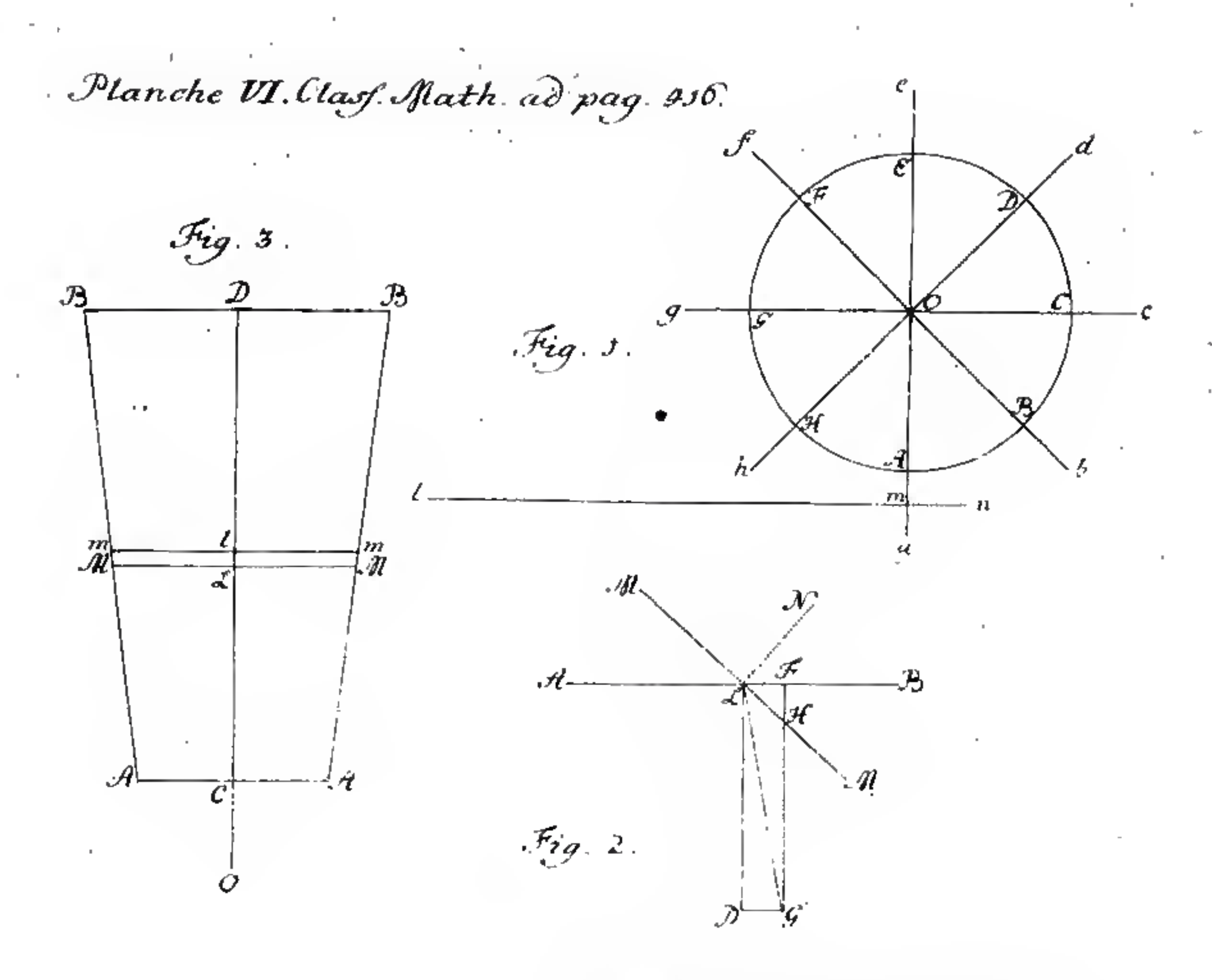


Planche V. Classe Math. ad pag. 316.



Mem. de l'Acad Tom. VI. pag. 311.


Fig. 3.
B
D
B
m
l
m
M
L
M
A
C
A
O
Fig. 1.
e
f
E
F
D
d
g
G
O
C
c
H
B
h
A
b
l
m
n
u
Fig. 2.
M
N
A
F
B
L
H
M
D
G

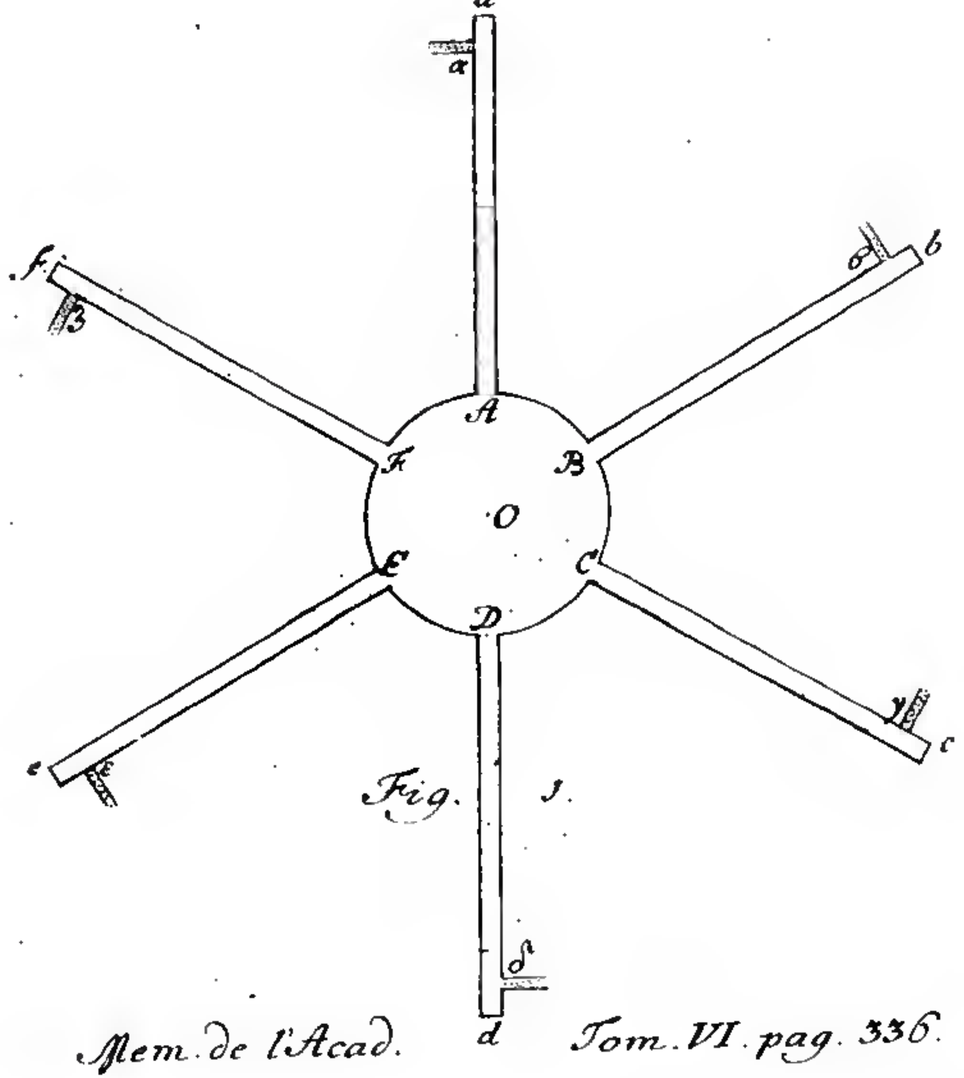


Fig. 1.

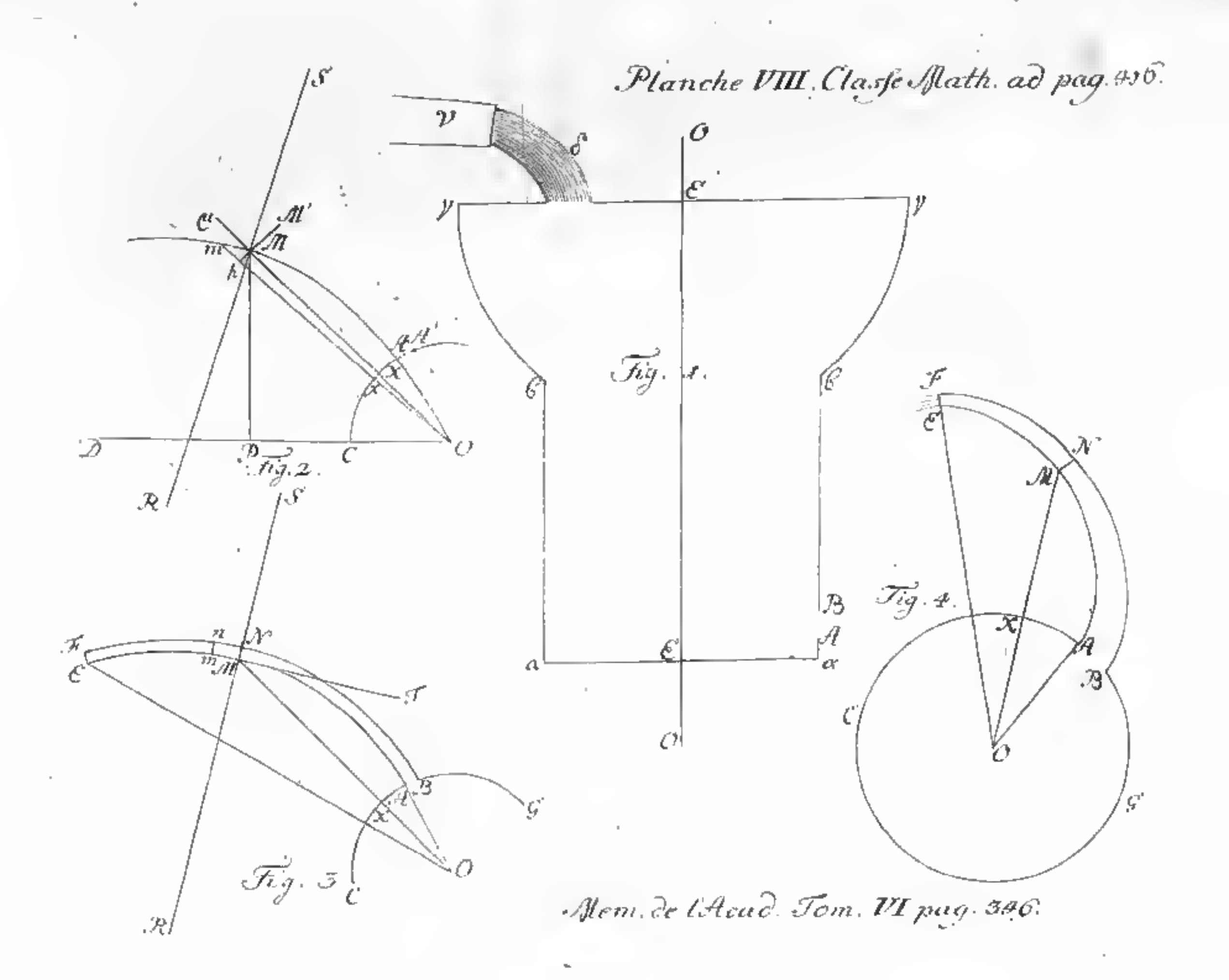

Planche VIII. Classe Math. ad pag. 416.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Mem. de l'Acad. Tom. VI pag. 396.

Planche IX. Classe Math. ad pag. 416.

Fig. 5.

Mem. de l'Acad. Tom: VI. pag 341